

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕХНІЧНОЇ ТЕПЛОФІЗИКИ**

**МОДЕЛІ ТА МІРИ
У ВИМІРЮВАННЯХ**

*За редакцією чл.-кор. НАН України,
В.П. Бабака*

КИЇВ
НАУКОВА ДУМКА
2019

УДК 53.08:517.987.1
ББК 30.10
М74

Автори:

В.П. Бабак, В.С. Єременко, Ю.В. Куц, М.В. Мислович, Л.М. Щербак

Рецензенти:

В.Ф. Резцов, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф.,
Інститут відновлювальної енергетики НАН України;
В.П. Малайчук, д-р техн. наук, проф.,
Дніпровський національний університет ім. Олеса Гончара

*Рекомендовано до друку вченою радою
Інституту технічної теплофізики НАН України 13.09.2018*

М74 Моделі та міри у вимірюваннях: Монографія / В.П. Бабак, В.С. Єременко, Ю.В. Куц, М.В. Мислович, Л.М. Щербак; за ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака. – К.: Наукова думка, 2019. – 192 с.
ISBN 978-966-00-1692-7

В монографії розглянуті сучасні методи створення моделей та мір у вимірюваннях, фізичні та ймовірнісні міри, моделі, простори та базиси сигналів та полів, детерміновані та ймовірнісні моделі та міри кутових величин і приклади їх використання на колі та в фазових вимірюваннях, моделі і міри для діагностування в електроенергетиці, безеталонних вимірюваннях характеристик композитних матеріалів.

Для наукових співробітників, інженерів, а також викладачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів, що займаються проблемами вимірювань, моніторингу та діагностики технічних об'єктів.

УДК 53.08:517.987.1
ББК 30.10

ISBN 978-966-00-1692-7

© В.П. Бабак, В.С. Єременко,
Ю.В. Куц, М.В. Мислович, Л.М. Щербак, 2019
© Наукова думка, 2019

Зміст

Передмова	5
Розділ 1. ПРОБЛЕМАТИКА ВИМІРЮВАНЬ	8
1.1. Загальні положення	8
1.2. Математична модель невизначеності вимірювання	14
1.3. Міри, їх властивості та використання у вимірюваннях	17
1.4. Концепція узгодження фізичних і ймовірнісних мір у вимірюваннях	26
1.5. Вимірювання як обернена задача теорії сигналів і систем	33
Розділ 2. МОДЕЛІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ТА ПОЛІВ	40
2.1. Математичні моделі сигналів та їх класифікація	40
2.2. Сигнали та ортогональні базиси	49
2.3. Моделі випадкових сигналів	53
2.4. Моделі багатовимірних сигналів та полів	60
Розділ 3. МОДЕЛІ ТА МІРИ У ВИМІРЮВАННЯХ ВИПАДКОВИХ КУТОВИХ ВЕЛИЧИН	65
3.1. Моделі випадкових кутів у вимірюваннях	65
3.2. Детерміновані та ймовірнісні міри кутових величин	73
3.3. Числові характеристики випадкових кутів	82
3.4. Моделі та міри випадкових кутів у фазових вимірюваннях	92
Розділ 4. МОДЕЛІ ТА МІРИ ПРИ ДІАГНОСТУВАННІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	102
4.1. Фізичні процеси формування діагностичних сигналів	102
4.2. Моделі формування навчаючих сукупностей (мір) для діагностування електроенергетичного обладнання	107
4.3. Побудова діагностичних просторів за результатами вимірювання інформаційних сигналів	112
4.4. Правила визначення технічного стану об'єктів електроенергетики	122

Розділ 5. ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ І МІР НА КОЛІ	128
5.1. Фазові системи ультразвукової луна-імпульсної товщинометрії	128
5.2. Багатошкальні фазові вимірювання на основі числових систем залишкових класів	137
5.3. Статистичне опрацювання даних в системах моніторингу параметрів довкілля на базі безпілотних авіаційних комплексів	150
Розділ 6. МОДЕЛІ І МІРИ ДЛЯ БЕЗЕТАЛОННИХ ВИМІРЮВАНЬ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ	156
6.1. Метод побудови віртуальних мір для інформаційних сигналів	156
6.2. Нейромережеві технології у безеталонній дефектоскопії композитних матеріалів	168
Література	188

ПЕРЕДМОВА

В наш час вимірювання є невід’ємною складовою у всіх сферах життєдіяльності сучасного суспільства – від побуту до високотехнологічних виробництв, енергетики, авіації, космонавтики, різних галузей науково-промислового комплексу країни. Забезпечення комфортних умов існування людини в своїй оселі (“розумний будинок”), виробництво електричної та теплової енергії, управління складними технологічними процесами, моніторингу динаміки у просторі і часі кліматичних і екологічних станів довкілля, управління транспортними об’єктами на землі, воді, повітрі та космосі, діагностування технічних та інших об’єктів різної складності, контроль та управління якістю продукції – всі ці процеси потребують виконання високоточних вимірювань значної кількості фізичних величин за умови їх розвитку у просторі і часі, опрацювання постійно зростаючих обсягів вимірювальної інформації.

Вимірювання є чи не єдиним джерелом отримання об’єктивної кількісної інформації про навколишній матеріальний світ, рівень і якість життєдіяльності суспільства. Розширення динамічного діапазону вимірювань в дослідженнях мікро- і макросвіту, підвищення вимог щодо точності і надійності результатів вимірювань, збільшення номенклатури вимірюваних електричних і неелектричних фізичних величин – все це потребує поглибленого розуміння синтезу і аналізу процедур і операцій вимірювань, розвитку відповідного теоретичного базису, інформаційного і апаратного забезпечення.

Наріжним каменем теорії і практики вимірювань завжди були і лишаються фундаментальні поняття моделі і міри. Відомо, що моделі і міри завжди відображали і слугували своєрідним індикатором досягнень науки і техніки на певному історичному етапі їх розвитку. На їх основі розроблявся вимірювальний інструментарій, використання якого на практиці сприяло отриманню нових знань. На практиці підтвердилась гіпотеза відомого англійського фізика А. Майкельсона (середина 19 ст.) про нові відкриття у фізиці, коли відносна точність вимірювань досягне рівня 10^{-n} ($n \geq 6$).

Саме детерміновані і ймовірнісні моделі вимірюваних величин і процесів, сигналів як носіїв інформації, а також фізичні та ймовірнісні міри дають змогу формувати результат вимірювання, надати йому властивості об’єктивності і

достовірності. Тому питання удосконалення та розвитку моделей і мір в методології вимірювань, відіграють все значущу роль для пошуку шляхів досягнення вищої точності вимірювань і розширення областей їх застосування. Питанням узагальнення та дослідження особливостей і застосування конструктивних моделей і мір в сучасній методології вимірювань і присвячена ця монографія.

Монографія складається з шести розділів.

У розділі 1 розглянуто загальні питання проблематики вимірювань, у тому числі основні положення та означення вимірювань, запропоновано систему постулатів, на яких ґрунтується теорія і практика вимірювань, та поняття математичної моделі невизначеності вимірювання, стисло охарактеризовано вимірювання як обернену задачу теорії сигналів і систем. Детально досліджено поняття *міра* та його розвиток від філософської категорії до об'єктів вивчення та використання в математиці та метрології. Автори запропонували і розглянули концепцію узгодження фізичних та ймовірнісних мір у вимірюваннях, запропонували класифікацію фізичних і ймовірнісних мір для вимірювань, використання різних мір в структурі інформаційно-вимірювальних систем.

У розділі 2 систематизовано математичні моделі вимірювальних сигналів та полів, розглянуто основні просторово-часові моделі квазі-детермінованих сигналів, наведено необхідні відомості про простори сигналів, зокрема лінійні, метричні, нормовані та Гільбертові. Окремо розглянуто застосування ортогональних базисів в дослідженні детермінованих сигналів, наведено теоретичні відомості про моделі випадкових сигналів та полів.

У розділі 3 розглянуто моделі і міри для вимірювань випадкових кутових величин, наведено основні поняття, терміни, визначення та характеристики, які використовуються в статистичному аналізі кутових даних. Проаналізовано найбільш характерні розподіли ймовірностей випадкових кутів – Мізеса та намотаний гауссовий розподіл. Виконано порівняльний аналіз числових характеристик випадкових величин і випадкових кутів. Подано основні відомості про розроблені авторами моделі та міри випадкових фазових зсувів циклічних сигналів для фазових вимірювань.

У розділі 4 наведено приклад побудови та використання моделей та мір у діагностиці електроенергетичних об'єктів, детально розглянуто процеси формування діагностичних сигналів, моделі формування навчаючих сукупностей (мір) для діагностування стану електроенергетичного обладнання, запропоновано варіант побудови діагностичних просторів за результатами вимірювання інформаційних сигналів, а також побудови розв'язуючих правил з діагностування і класифікації певних видів дефектів у вузлах електроенергетичних об'єктів.

У розділі 5 наведені приклади використання моделей і мір на колі для розв'язання завдань прецизійної ультразвукової товщинометрії виробів з матеріалів зі значним загасанням, опрацювання результатів багатоскальних фазових вимірювань на основі числових систем залишкових класів у фазових далекомірах та пеленгаторах, розглянуто особливості статистичного опрацювання даних в системах моніторингу параметрів довкілля на базі безпілотних авіаційних комплексів.

У розділі 6 розглянуто особливості використання моделей і мір для безеталонних вимірювань характеристик композиційних матеріалів, обґрунтовано можливість використання нейронних мереж в комп'ютеризованих системах діагностики для класифікації дефектів і побудови відповідних шкал найменувань.

Автори висловлюють щиро подяку рецензентам – чл.-кор. НАН України В.Ф. Резцову (Інститут відновлювальної енергетики НАН України) та д. т. н., проф. В.П. Малайчуку (Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара) за зауваження, рекомендації та допомогу у формуванні рукопису.

Ряд сформульованих положень та тверджень мають дискусійний характер. Автори будуть щиро вдячні всім читачам, які надішлють свої відгуки, зауваження та пропозиції стосовно викладеного матеріалу монографії за адресою: 03680, м. Київ, вул. Желябова, 2а, Інститут технічної теплофізики НАН України; e-mail: vdoe@ukr.net.

Київ, осінь 2018

Від авторів

1. ПРОБЛЕМАТИКА ВИМІРЮВАНЬ

1.1. Основні положення

Вимірювання вважаються одним із основних напрямів пізнання світу. В наш час вимірювальні операції проводяться в таких значних масштабах у всьому світі, що це стало невід'ємною частиною нашого життя. При більш глибокій постановці задач вимірювання саме відсутність їх результатів не дають можливості вирішити ряд актуальних і важливих проблем сьогодення. Наприклад, кліматичні і екологічні проблеми на нашій планеті вирішуються не в повному обсязі через відсутність необхідних баз даних вимірювання динаміки у часі і просторі характеристик довкілля. Це в першу чергу обумовлено недостатньо обґрунтованими математичними моделями, просторово нерозвинутих апаратним і відповідним інформаційним забезпеченням досліджень довкілля

Для розкриття змісту і суті вимірювань стисло наведемо основні положення вимірювань і розглянемо використання моделей і мір як основних предметів при проведенні широкого кола досліджень. Загальний підхід використання вимірювань можна представити схематичною ілюстрацією (рис. 1.1).

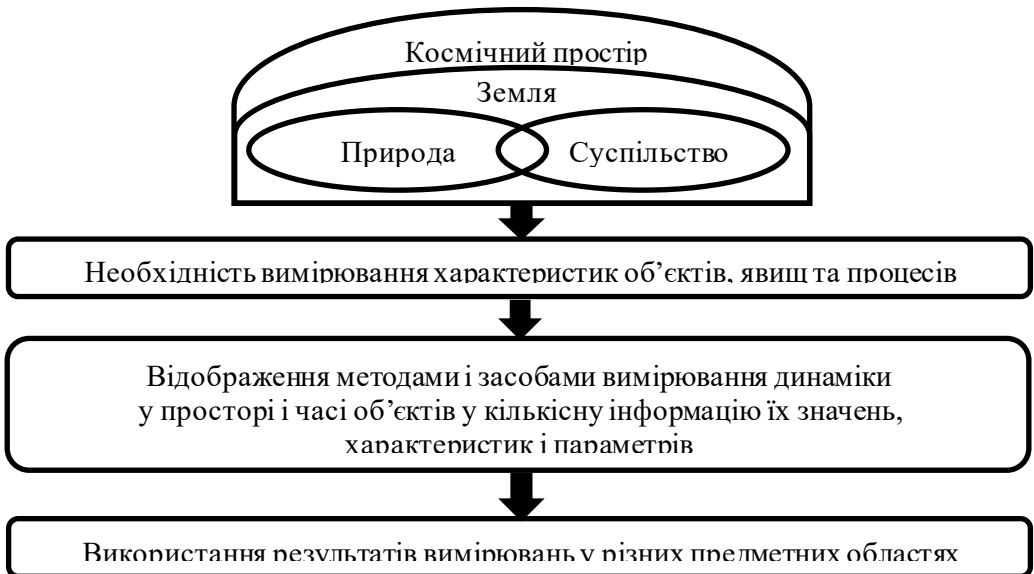


Рис. 1.1. Схематична ілюстрація використання вимірювань

В метрології, як науці про вимірювання і їх практичне застосування, виділяють три основні напрями досліджень [22, 74, 82, 107]:

теорію вимірювань, включаючи теоретичні основи створення фізичних і математичних моделей, методів, мір, інформаційного і апаратного забезпечення процесів вимірювання;

прикладну метрологію, включаючи розробку апаратно-програмних засобів і систем вимірювання, еталонну базу фізичних величин та ін.;

законодавчу метрологію, яка включає законодавчі акти, стандарти і рекомендації, виконання яких регламентуються і контролюються державою для забезпечення єдності вимірювань у країні та за її межами.

Означення вимірювання. Враховуючи широкий діапазон використання вимірювання доцільно навести три варіанти його означень [7, 62, 63, 74, 95].

Філософія. Вимірювання – створення і використання на кожному етапі розвитку суспільства ефективного вимірювального інструментарію як основного ресурсу пізнання світу.

Метрологія. Вимірювання – відображення динаміки у просторі і часі значень і характеристик різних фізичних величин у кількісний результат на базі взаємодії з об'єктом дослідження спеціальних засобів вимірювання.

У широкому сенсі. Вимірювання – отримання і використання результатів експериментальних вимірювальних процедур для моніторингу та управлінню режимами функціонування об'єктів і систем в різних галузях науки, техніки та господарства, моніторингу рівня та якості життя суспільства.

Кожна наука стає більш структурованою, якщо для неї сформована відповідна система законів, аксіом, або постулатів. Прикладами може бути: аксіоми Евкліда в геометрії; аксіоми Колмогорова в теорії ймовірностей; закони Ньютона в механіці; таблиця Менделєєва в хімії; фундаментальні закони термодинаміки, та електродинаміки.

Для вимірювання як поєднання теорії і практики може бути запропонована така система постулатів [7, 33, 63, 110, 111]:

Постулат 1. Динаміка змін властивостей, значень і характеристик фізичних величин об'єктів природи та цивілізації відбувається і проявляється у просторі і часі.

Постулат 2. Кількісний результат вимірювання фізичної величини формується взаємодією об'єкта досліджень із засобом вимірювання, на основі використання порівняльних операцій з мірою одиниці фізичної величини і опрацюванням отриманих даних вимірювання.

Постулат 3. Теорію і практику кожного вимірювання об'єднує і відображає математична модель динаміки у просторі і часі фізичної величини як модель невизначеності і відповідні оператори засобів вимірювання її перетворення для оцінювання результатів вимірювання.

До основних проблем вимірювання відносять наступні [7, 74, 91, 95]:

Проблема відображення. Обґрунтування і відображення динаміки у просторі і часі фізичної величини у модель невизначеності вимірювання та відповідних операторів її перетворення у ланках і модулях засобів вимірювання.

Проблема стабільності мір. Забезпечення просторової однорідності та часової стаціонарності мір і еталонів у різних місцях і у різні моменти часу з метою забезпечення єдності вимірювань і досягнення заданих результатів і показників їх точності.

Проблема захисту даних і результатів вимірювання. Здійснення комплексу дій і використання засобів захисту під час формування, передачі, опрацювання та подання даних і результатів вимірювання у відповідності до вимог безпеки інформації з метою мінімізації впливу як природних так і навмисних завад та несанкціонованого доступу до вимірювальної інформації.

Системи одиниць фізичних величин. З історії розвитку вимірювання відомо, що першими засобами вимірювання були органи відчуття людини. Самі вимірювання почались з того моменту часу, коли певному матеріальному об'єкту чи процесу (наприклад, пальцю певної довжини, руки вождя племені, мішка зерна, часовому інтервалу, що відповідає певній фазі Сонця, Місяця на небі тощо) була поставлена у відповідність (відображення) абстрактна одиниця – як первинна числова міра, розмір фізичної величини. Поява одиниць числової системи стала відправною точкою розвитку геометрії, математики та інших наук. У подальшому формувались і використовувались різні системи одиниць фізичних величин. Факти формування і переходу на іншу систему одиниць свідчили про відповідні етапи розвитку земної цивілізації, тобто слугували своєрідними індикаторами їх діяльності, а для реалізації одиниць фізичних величин використовувався потенціал досягнень науки і техніки на відповідний період часу.

Прикладом може служити процес формування сучасної системи одиниць СІ, на основі використання якої результати вимірювання величин макросвіту отримуються на основі одиниць величин мікросвіту (навести визначення секунди). Так, наприклад, одиниця часу секунда (атомна секунда) системи СІ визначається так: *секунда (с) дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома зверх тонкими рівнями основного стану*

атома цезія-133. На сьогодні з використанням системи одиниць СІ проводяться вимірювання до 100 електричних і магнітних величин та більше 4000 величин іншої фізичної природи.

Результати вимірювань служать первинною корисною інформацією для подальших операцій контролю, діагностики, управління, прогнозу та ін. Вживається також поняття або термін *моніторинг*, що безпосередньо пов'язаний з вимірюванням, у першу чергу з кількісною інформацією про досліджуваний об'єкт чи систему, що розвивається в просторі та часі.

Моніторинг – процес досліджень у просторі і часі функціонування та стану різних об'єктів і систем для отримання динаміки їх поточних значень і характеристик за даними вимірювання для вирішення задач контролю, діагностики, управління та прогнозу.

На основі даних вимірювань у різних предметних областях можна навести приклади орієнтовних часових інтервалів моніторингу (рис. 1.2), які в значній мірі визначають методологію проведення відповідних процесів вимірювання як об'єктів макросвіту, так і об'єктів мікросвіту.

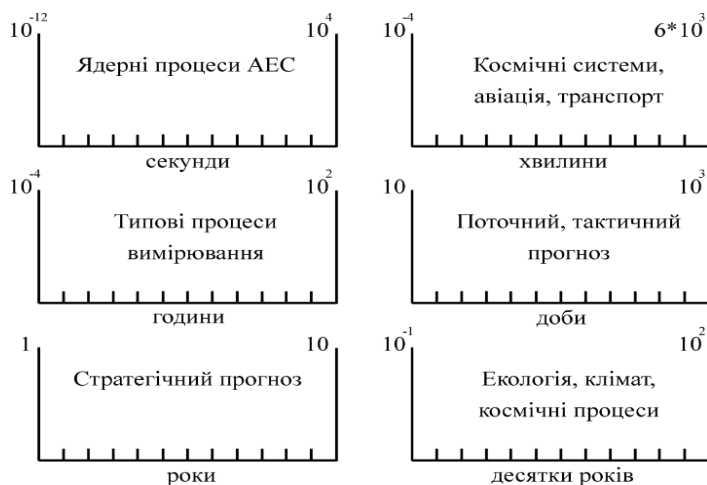


Рис. 1.2. Приклади часових інтервалів (шкал) моніторингу у різних предметних областях

Процес вимірювання і основні етапи його реалізації. Вимірювальні операції мають характерні особливості, які описують [74, 75, 95, 107]:

взаємодію об'єкта досліджень з первинним вимірювальним перетворювачем (сенсором) засобу вимірювання;

перетворення вимірювальної інформації об'єкта досліджень – інформації фізичної величини у вимірювальний сигнал, який є її фізичним носієм;

порівняння рівня сигналу з розміром одиниці вимірювання і формування числових даних вимірювання;

оцінювання і представлення кількісних результатів і характеристик невизначеності вимірювання.

Виконання таких операцій дає можливість відобразити специфіку процесу вимірювання, класифікувати апаратно-програмні засоби (системи) та описати такі етапи.

Організаційно-підготовчий етап. На цьому етапі формується, узгоджується Замовником і Виконавцем технічне завдання на проведення вимірювального експерименту, визначаються терміни виконання, виділення необхідних засобів та інших ресурсів, в тому числі фінансових (рис. 1.3).

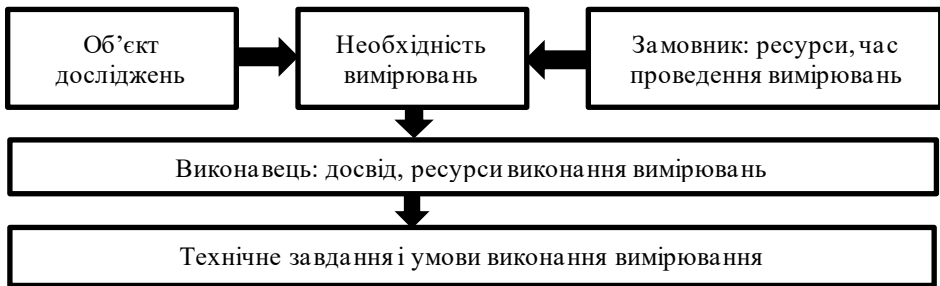


Рис. 1.3. Структурна схема проведення організаційно-підготовчого етапу процесу вимірювань

Етап створення інформаційного та апаратного забезпечення. На цьому етапі Виконавцем розробляється, обґрунтовується інформаційне (моделі, міри, алгоритми, програми) і апаратне (засоби, системи, обладнання) забезпечення проведення вимірюваного експерименту; створюється і узгоджується програма і методика проведення такого експерименту (рис. 1.4).

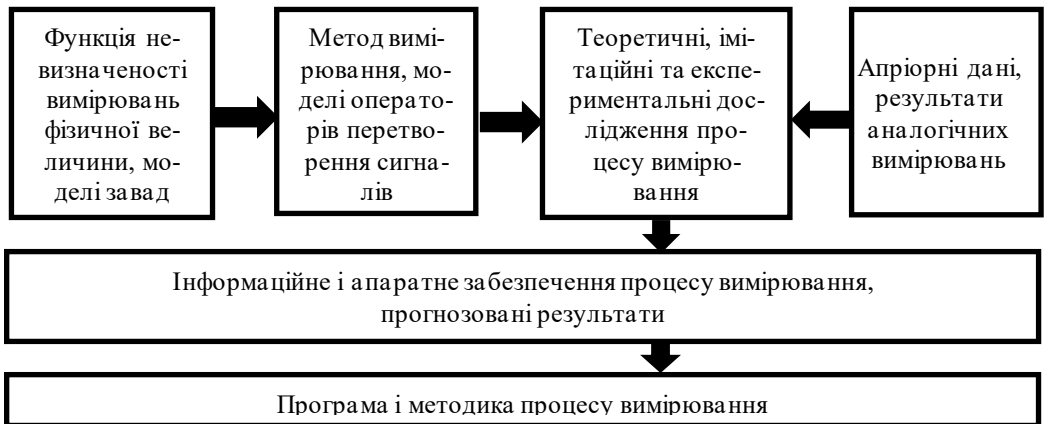


Рис. 1.4. Структурна схема проведення етапу створення інформаційного і апаратного забезпечення процесу вимірювання

Завершальний етап. На цьому етапі Виконавцем проводиться натурний вимірювальний експеримент, опрацьовуються даних вимірювань і отримується результат і показники точності вимірювання. Ці результати оформляються і передаються Замовнику для подальшого використання (рис. 1.5).

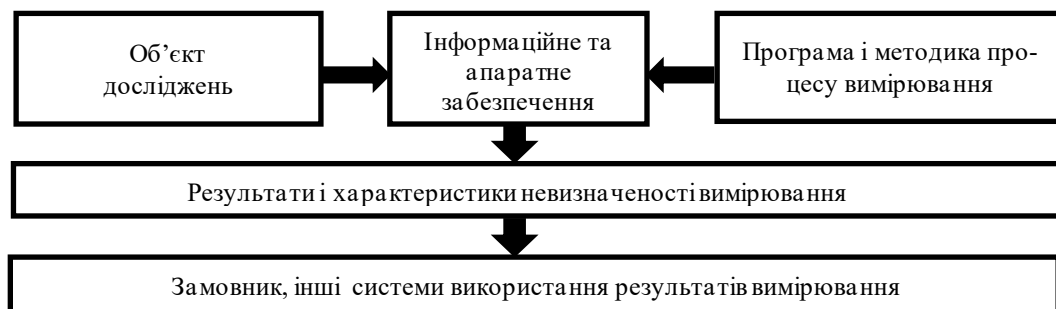


Рис. 1.5. Структурна схема завершального етапу процесу вимірювання

Інтегрально проблематика вимірювання фізичних величин з виділеними моделями і мірами ілюструється наступним схематичним зображенням (рис. 1.6).



Рис. 1.6. Схематичне зображення формування результату вимірювання фізичних величин

Перейдемо до більш детального розгляду моделей і мір у задачах вимірювання як основних предметів дослідження даної роботи.

1.2. Математична модель невизначеності вимірювання

Вирішення широкого кола завдань вимірювань поєднуються на основі застосування фізичних і математичних моделей досліджуваних об'єктів, процесів і явищ. Незважаючи на той факт, що такі моделі є вторинними, тобто є копіями, відображеннями, які не в повній мірі відповідають реальним об'єктам, їх роль в методології вимірювань дуже вагома і має фундаментальний характер. Кожна з моделей, фізична та математична, доповнюють одна одну, що дає змогу підвищити ефективність процесу вимірювань, наприклад, обґрунтувати шляхи підвищення точності результатів вимірювань.

З метою врахування специфіки і характерних особливостей вимірювання запропоновано виділити на множині широкого кола моделей клас математичних моделей які описують первинну інформацію вимірювання фізичних величин різних об'єктів досліджень. Клас таких моделей будемо іменувати класом моделей невизначеності вимірювання [62, 63].

Математичною моделлю невизначеності вимірювання є одновимірна або багатовимірна гільбертова детермінована або випадкова функція, чи їх комбінації, значення і числові характеристики яких оцінюються результатами і показниками точності вимірювань.

Математична модель невизначеності вимірювання фізичної величини створюється на основі сукупності знань, гіпотез, початкових і граничних умов сформованих за апіорними даними досліджень величини, записана з використанням математичних об'єктів, термінів і символів у виді логічно витриманої, несуперечливої структури, яка відображає динаміку у просторі і часі, властивості, значення і характеристики досліджуваної величини, а їх кількісне оцінювання необхідно здійснити опрацюванням даних вимірювального експерименту.

Відомо, що енергетичні характеристики другого порядку (наприклад, енергія, потужність, дисперсія) гільбертових функцій є скінченними, тобто такі функції є фізично реалізованими, а не є математичною ідеалізацією (такою, наприклад, як неперервний випадковий процес білого шуму, що має нескінченну дисперсію).

Наведене вище означення моделі невизначеності використовує найбільш типові і вживані в теорії і практиці вимірювань функції, як реалізації такої моделі. Ці функції іменуються *функціями невизначеності вимірювання*.

Модель невизначеності вимірювання є:

необхідною складовою постановки кожного завдання вимірювання;

гіпотетичною функціональною залежністю за відсутності необхідних априорних даних побудови функціональної залежності, що характерно на первинних етапах дослідження нових фізичних величин;

теоретичним інструментарієм побудови математичної моделі досліджуваної величини за даними вимірювань з досягнутими показниками точності.

Еволюцію моделей невизначеності вимірювання можна проілюструвати наступною схемою у вигляді діаграми Венна-Ейлера (рис. 1.7).

На рисунку 1.7 позначено: 1 - загальна множина моделей; 2 - клас первинних моделей невизначеності вимірювань; 3 - модель досліджуваної величини з використанням кількісних результатів і досягнутих показників точності вимірювань; 4 - ідеалізована модель вимірювання, яка використовується в комп'ютерному вимірювальному експерименті та в інших випадках з урахуванням тільки кількісного результату вимірювань.

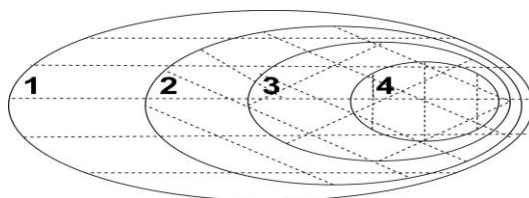


Рис. 1.7 Схематичне зображення еволюції моделі невизначеності вимірювань у вигляді діаграми Венна-Ейлера

В процесі створення, обґрунтування та використання таких моделей необхідно враховувати характерні особливості вимірювання, на яких зупинимось більш детально.

Найбільш складними і важливими завданнями процесу вимірювань, які забезпечують успіх вимірювального експерименту, є виконання наступних вимірювальних операцій:

з використанням апаратного забезпечення: формування вимірювальної інформації; перетворення сформованої інформації первинним перетворювачем (сенсором) у вимірювальний сигнал; порівняння сигналу з мірою фізичної величини і формування числової інформації (даних вимірювань);

з використанням інформаційного забезпечення: обґрунтування і створення моделі фізичної величини; створення моделі оператора перетворення вимірювальної інформації; обґрунтування моделі вимірювального сигналу.

Проведення вказаних вище вимірювальних операцій схематично ілюструє рис. 1.8

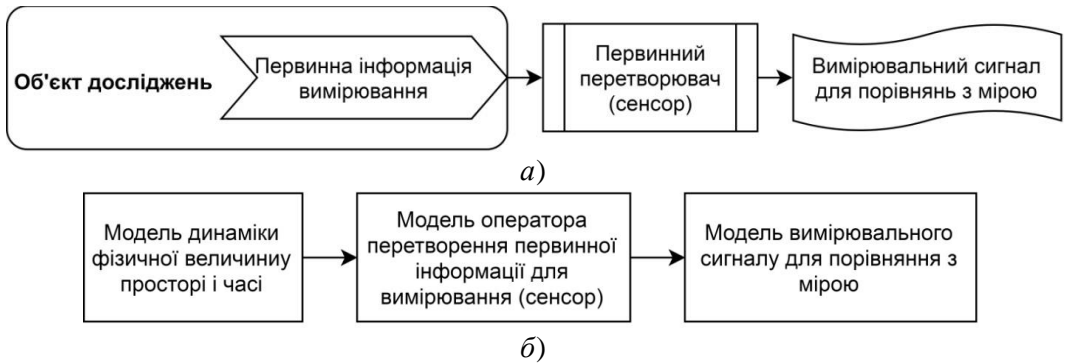


Рис. 1.8. Схематична ілюстрація виконання перших операцій вимірювального експерименту на основі використання: а) апаратного забезпечення; б) інформаційного забезпечення

У загальному випадку можна виділити три варіанти формування первинної інформації вимірювання об'єкта досліджень (ОД) (рис. 1.9).



Рис. 1.9. Схематична ілюстрація формування варіантів первинної інформації (сигналів) вимірювання об'єкта досліджень

Враховуючи різноманітність і різноплановість процесів вимірювання у широкому колі предметних областей галузей господарства, науки і техніки наведемо класифікацію моделей невизначеності вимірювання (рис. 1.10). За ознаки класифікації вибрані предметні області використання, вид і характер моделей та комбінації моделей.

Проблематика вимірювань

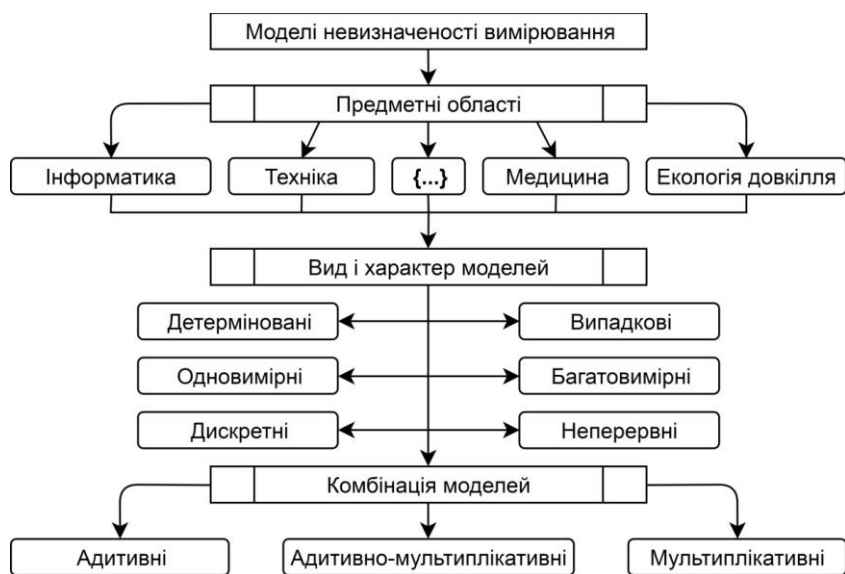


Рис. 1.10. Класифікація моделей невизначеності вимірювання

Будь яка класифікація є до певної міри умовною. Тому наведена на рис. 1.10 класифікація може доповнюватись, або змінюватись у відповідності з введенням нових ознак і структур.

1.3. Міри, їх властивості та використання у вимірюваннях

Зростаюча потреба у вимірюваннях, постійне ускладнення процедур і засобів вимірювання, проникнення вимірювань у нові сфери матеріального світу потребувало на кожному етапі розвитку людства відповідного логіко-методологічного осмислення поняття міри. Відповідно до запитів суспільства від давніх часів і до нині спостерігається процес розвитку філософської категорії міри – від етико-морального поняття до абстрактної математичної теорії міри. Для більш глибокого осмислення її змісту і ролі в теорії пізнання світу в цілому, і в метрології зокрема, стисло розглянемо виникнення, розвиток і використання цього поняття у філософському, математичному і метрологічному аспектах.

Наведемо ряд фактів з історії розвитку міри [22, 51, 102, 103].

В античній міфології символом міри була богиня Немезіда, яка зображалась з терезами в руках. В це поняття вкладався етико-моральний зміст, що розумівся як порівняння помірності, зваженості у вчинках і словах на проти-вагу надмірності і ненегативним вчинкам діяльності людей.

Відомий давньогрецький вчений Піфагор та його учні (6-4 ст. до н.е.) намагались кількісно виразити міру за допомогою чисел і пропорцій. До прикладу ознакою справедливості вони вважали еквівалентність, рівність, і намагаючись виразити їх числами. Так справедливість визначали як *перші квадратні числа*, тобто як 4 чи 9. Обговорюючи проблему співмірності називали величини, що підпадали під одну міру *спільномірними*, а ті, що не підпадали – *неспільномірними*.

Пізніше Аристотель (445- 385 рр. до н.е.), один з найвидатніших давньогрецьких філософів і вчених, розмірковував наступним чином: «Міра (від грецького *metron*) є те, чим пізнається кількість; а кількість пізнається або єдиним, або числом, а будь-яке число – єдиним, отже будь-яка кількість є такою що пізнається ...». Так єдине, будучи початком числа, виражається в деякій неподільній мірі – масштабі вимірювання, що має числову форму. «Міра числа є найточнішою: адже одиниця сприймається як дещо у всіх відношеннях неподільне». У всіх інших випадках міра виступає як зразок вимірювання, наприклад, рідкого чи сипучого, що має вагу і величину. Перераховуючи різні види мір як одиниці вимірювань, Аристотель висловлював думку, що не можна обмежитися лише однією мірою і слід виокремлювати декілька мір, представлених в тих чи інших числових співвідношеннях або пропорціях, крім того міра як одиниця вимірювання повинна бути *однорідною з вимірюваним*.

Інший давньогрецький філософ Протагор (близько 490 – 420 рр до н.е.), один з найвідоміших софістів, проголосив: « Людина – міра всіх речей: для існуючих – що вони існують, для неіснуючих – що вони не існують». В цьому висловлюванні вже закладено думку про різну якість речей і перехід від однієї якості до іншої. Але тільки у 18 столітті видатний німецький філософ Георг Вільгельм Фрідріх Гегель (1770 – 1831) розвинув цю ідею. Аналізуючи зміну якості у категоріях кількості він прийшов до філософської категорії міри. Саме дослідження у нерозривному зв'язку категорій якості і кількості дало змогу Гегелю переконливо показав, що зміни буття є не лише переходом однієї величини в іншу, але й переходом якісного у кількісне і, навпаки. За Гегелем міра – це єдність якості і кількості, які обумовлені самою природою об'єкта. В такому визначенні відображено нерозривний зв'язок між якісною і кількісною стороною кожного предмета чи явища матеріального світу. Міра означає, що будь-яка певна якість зв'язана з певною кількістю. Кожному якісно своєрідному предмету чи явищу притаманні певні кількісні характеристики. Останні мають властивість мінливості і рухомості.

За Гегелем перехід кількісних змін в якісні означає зміну однієї міри іншою. Якщо кількісні зміни відбуваються в межах притаманної для цього

явища міри, їх якість лишається незмінною. Якщо кількісні зміни приводять до виходу явища за межі своєї міри, відбудеться зміна якості. До прикладу, температура води не впливає на її рідкий стан до моменту досягнення точки кипіння, коли вода переходить у пару. Межі таких переходів власне і є мірою і відіграють роль своєрідних еталонів, внутрішніх по відношенню до предметів. В цьому сенсі міра є внутрішньою властивістю предмета, що ґрунтується на єдності його кількісних і якісних характеристик.

Трансформація кількості в якість має і зворотний процес – перехід якості в кількість. Наново утвореній якості відповідає нова міра, тобто нова конкретна єдність якості і кількості, що уможливорює подальші кількісні зміни нової якості і наступний перехід кількості у якість. Відкритий Гегелем закон взаємного переходу кількісних і якісних змін описує механізм саморозвитку явищ матеріального світу.

Поняття міри почали активно використовувати і наповнювати новим змістом у різних напрямках діяльності суспільства.

У використанні міри слід виділити:

міру в широкому сенсі, в основному, як якісну категорію;

міру у вузькому сенсі як кількісну категорію.

Характеризуючи інтегральну роль міри слід відмітити наступне. З розвитком промисловості і виробництва, розширення і зміцнення торгівельних зв'язків між державами проводилися спроби введення різних мір як єдиних правил міждержавних відносин. Ці спроби були як вдалим так і не зовсім. І про це можна судити в наш час.

У даній роботі будуть розлягатися міри, які використовуються у метрології у відповідності з Концепцією невизначеності.

Успішність використання єдиних мір метрології міжнародною спільнотою можна вважати одним і унікальних фактів в історії земної цивілізації. Метрологія стала інтернаціональним інструментом спілкування вчених, дослідників, фахівців виробництва та інших у всіх країнах світу.

Роль міри в оцінювання невизначеності вимірювання. Така постановка, в першу чергу, має філософське підґрунтя, про що говорилося раніше. В процесі створення вимірювального інструментарію міра є фундаментальним елементом, на основі якого якість оцінюється кількісно. Тим самим формується принципово нова кількісна інформація, зменшується невизначеність досліджуваних об'єктів, явищ і процесів. Цей факт дає можливість скоректувати відому тріаду методології проведення наукових досліджень – «*модель->алгоритм->програма*»; на більш аргументовану – «*модель->міра-> алгоритм->програма*».

Ефективність практичної реалізації і використання мір визначається їх значеннями невизначеності при відтворенні одиниць фізичних величин. Чим менше значення невизначеності, тим вищий клас еталону чи засобу вимірювання при реалізації відповідної міри. Відомо, що кожна країна має національні еталони одиниць фізичних величин. Номенклатура еталонів і їх характеристика невизначеності оцінюються на рівні валового продукту і вважається національною скарбницею кожної країни. Найбільш розвинені країни світу мають і найбільшу номенклатуру національних еталонів одиниць фізичних величин.

Міри математики. Теорія міри є один із важливих для практичного застосування напрямів математики, в рамках якого обґрунтовуються і визначаються методи створення різних видів мір.

Матеріал, який буде наведено далі, є адаптованим до проблематики вимірювання. Міра як математичний об'єкт знайшла практичне застосування для створення мір різних фізичних величин – маса, довжина, площа, об'єм тощо.

У загальному випадку міра є зліченно-адитивною функцією множин, вона приймає тільки невід'ємні значення, включаючи і нескінченність. В математиці досліджується ціла низка мір, наприклад: міри Жордана; Лебега; Лебега-Стільтьєса; стохастична міра та ін. [104]. Так, означення міри Жордана близьке до означення площі, об'єму у просторі. Міра Лебега-Стільтьєса використовується у теорії імовірностей. Стохастична міра є випадковою зліченно-адитивною функцією множин. При цьому для доведення умови зліченно-адитивності стохастичної міри використовуються різні види збіжності, а саме: збіжність за імовірністю; у середньоквадратичному; з імовірністю одиниця [104]. Але найбільш широке використання для теорії і практики вимірювань мають числові міри, тобто міри, які приймають числові значення.

В наш час маємо цікавий факт узагальнення міри, пов'язаний з вимірюванням. Відомо, що раніше міра приймала тільки невід'ємні числові значення. При практичних задачах вимірювання виникло питання, як визначити міру фізичної величини з від'ємним електричним зарядом? Простим і природним узагальненням міри є *заряд*. Термін *заряд* запозичений з фізики. У фізиці заряд відрізняється від маси тим, що маса завжди невід'ємна, а заряд може бути як додатнім так і від'ємним. Така ж відмінність між мірою і зарядом як математичними об'єктами. Цей факт суттєво розширює межі використання методів теорії міри в метрології.

В якості прикладів наведемо означення ймовірнісної міри і заряду.

Ймовірнісна міра. Математична модель фізичної величини – випадкова величина $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ широко використовується в теорії вимірювання. При

невідомих характеристиках $\xi(\omega)$ є предметом вимірювання і визначається як функція невизначеності вимірювання.

Відомо, що $\xi(\omega)$ як випадкова функція має:

область визначення задається ймовірнісним простором (Ω, F, P) , де – простір елементарних подій $\omega \in \Omega$, F – алгебра (σ -алгебра) підмножини Ω , P – ймовірність елементарних подій: $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ і $P \in [0, 1]$;

область значень задається ймовірнісним простором (X, B, P_ξ) , де $X \subseteq R$ – числова підмножина числової прямої R , B – алгебра (σ -алгебра) підмножини X , P_ξ – ймовірність значень $\xi(\omega)$.

Випадкова функція $\xi(\omega)$ повністю задається функцією розподілу:

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\}, x \in R.$$

Ймовірнісна міра $\xi(\omega)$ як функція множин не може бути безпосередньо записана у загальному вигляді, для неї породжуючою функцією є функція $F(x)$.

Ймовірнісна міра $P_\mu(x_1, x_2)$ визначає ймовірність того, що випадкова неперервна функція $\xi(\omega)$ прийме значення із неперервного числового інтервалу

$$[x_1, x_2], x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2,$$

тобто

$$P_\mu[x_1, x_2] = P\{\omega \in \Omega: x_1 \leq \xi(\omega) \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Таким чином, одновимірна ймовірнісна міра $P_\mu[x_1, x_2] \geq 0$ є невід’ємною, нормованою і безрозмірною з областю значень.

Для більш складних випадкових функцій, наприклад, двовимірного випадкового вектора $\Xi_2(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$, де $\{\xi_i(\omega), i = 1, 2\}$ – одновимірні випадкові величини, ймовірнісна міра вектора визначається також більш складно з використанням двовимірної функції розподілу вектора $F(x, y)$. Так, наприклад, ймовірнісна міра знаходження значень випадкового вектора $P_\mu[x \pm h_x, y \pm h_y]$ у межах двовимірного числового простору площини (x, y)

$$((x - h_x) < \xi_1(\omega) < (x + h_x), (y - h_y) \leq \xi_2(\omega) < (y + h_y)),$$

визначається виразом

$$P_{\mu} [x \pm h_x, y \pm h_y] = \\ = F(x + h_x, y + h_y) - F(x - h_x, y + h_y) - F(x + h_x, y - h_y) + F(x - h_x, y - h_y), \\ x, y \in R, h_x, h_y > 0.$$

Розглянемо наступний приклад заряду як міри з використанням топологічного простору.

Заряд як міра. За означенням заряд є також функцією множин. Для розкриття суті заряду використаємо вимірний топологічний простір, як відповідну формалізацію числових даних вимірювань отриманих з використанням заряду як міри. У подальшому використання топологічного простору дає можливість оцінити невизначеність результату вимірювань типу В.

Побудову вимірного топологічного простору із зарядом як об'єкту теорії міри виконаємо поетапно з коментарями інтерпретації процесу вимірювання.

У зв'язку з тим, що побудова топологічного простору є теорією, а отримання реальних даних вимірювань є практикою, тобто є реалізацією теорії, етапи теорії позначимо одним числом, а коментарі практика – подвійним числом.

1. Задається числова множина даних вимірювань X з елементами $x \in X$.

1.1 Множина X – дискретна послідовність даних вимірювань, може бути отримана з використанням різних мір, включаючи і заряд.

2. Кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність окіл $U(x)$, як система відкритих множин.

2.1. Для кожного значення послідовності даних вимірювання ставиться окіл, розмір якого визначається інтегрально невизначеностями фізичної величини і засобу вимірювання.

3. Створюється система відкритих множин $I, U(x) \in I, x \in X$, яка іменується топологією.

3.1. Топологію можна використати для прогнозу значень подальших даних вимірювання.

4. Пара (X, I) називається топологічним простором, якщо виконуються наступні дві умови:

а) для $\forall x \in X$ має місце $\exists U(x) \in I$; (1.1)

б) для $\forall x \in X$ і $(U(x), V(x))$ має місце $\exists W(x) \in I$, де $W(x) \subseteq U(x) \cap V(x)$ (1.2)

4.1 В основному виконання наведених умов – це формування алгебри (\exists) підмножин X та I для формалізації побудови топологічного простору.

5. Топологічний простір (X, I) іменується вимірним, якщо для нього крім виконання умов (1.1) і (1.2) додатково клас підмножин $I \in \sigma$ -алгеброю.

5.1. Виконання додаткової умови включаючи і зліченний (нескінченність) випадок є важливим для коректної формалізації з метою врахування всіх можливих випадків класу підмножин I .

6. Топологічний простір (X, I) іменується хаусдорфним, якщо для нього крім виконання умов (1) і (2) додатково виконується наступна умова:

в) для $\forall x, y \in X$ має місце $\exists [U(x), U(y)] \in I : U(x) \cap U(y) = \emptyset, x \neq y$.

6.1 Властивість хаусдорфного топологічного простору – кожна пара точок такого простору має околи, які не перетинаються згідно аксіоми відокремлення Хаусдорфа, має принципово важливе значення при отриманні даних вимірювання. Саме завдяки їй два значення даних вимірювання можна вважати різними з використанням роздільної здатності засобу вимірювання.

7. Дійсна функція q задана у просторі X на σ -алгебрі підмножин I така, що:

$$q(A) \in \Sigma \subseteq R, A \in I, \quad (1.3)$$

для якої виконуються наступні умови:

$$з) \quad q(\emptyset) = 0; \quad (1.4)$$

д) функція q є зліченно-адитивною, тобто для

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,$$

маємо

$$q\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} q(A_i). \quad (1.5)$$

7.1. З умов (в) і (з) слідує, що заряд як міра відповідає всім її умовам за виключенням умови невід'ємності. Заряд q може бути як від'ємним так і додатним. Це важливо при реалізації одиниць фізичних величин, які можуть мати різні знаки.

8. Сукупність (X, I, q) іменується вимірним топологічним простором із зарядом. Ця сукупність є математичною моделлю більш загального характеру у порівнянні з ймовірнісною мірою для реалізації мір метрології як матеріальних об'єктів для засобів (систем) вимірювання.

Наведені вище міри стосуються величин, які задані на числовій прямій. В той же час значна частина завдань вимірювань пов'язана з дослідженням випадкових кутів. Останні, як математичні об'єкти, мають певну специфіку, яка приводить до необхідності задання ймовірнісних мір на колі. Більш детально ці питання будуть розглянуті в розділі 3.

Розглянемо реалізацію фізичних мір в метрології.

Фізичні міри. Поняття міри є визначальним і для метрології. Сучасна трактовка поняття міри для прикладних технічних застосувань формувалась починаючи з 17 ст., коли процедури вимірювання стали методологічно значущими та вкрай важливими для розвитку матеріального виробництва, а номенклатура вимірюваних фізичних величин почала стрімко збільшуватись. На сьогодні загальноприйнятим в метрології є наступне означення: *міра* – це вимірювальний пристрій, що реалізує відтворення та (або) збереження фізичної величини заданого розміру. Зустрічається і інше означення: *міра (міра фізичної величини, міра величини)* – засіб вимірювання у вигляді якогось тіла, речовини чи пристрою, призначений для відтворення та збереження фізичної величини одного чи декількох заданих розмірів, значення яких виражені у встановлених одиницях і відомі з необхідною точністю. В цих означеннях використано такі вихідні поняття як величина і фізична величина. У широкому розумінні *величина* – це узагальнення конкретних понять, наприклад, довжини, плоского кута, площі, маси тощо; *фізична величина* розуміється як властивість, спільна в якісному сенсі багатьом фізичним об'єктам (чи їх станам), та індивідуальна для кожного з них у кількісному відношенні. Зазвичай фізичні величини мають відповідні розмірності. Величини як окремі самостійні об'єкти не існують, а є певними характеристиками групи об'єктів матеріального світу. Тому й під мірою у наведених вище означеннях розуміється матеріальний носій фізичної величини заданого розміру.

Наведені означення міри орієнтовані на практичну реалізацію вимірювань, і не відображають її фізико-математичної сутності. У такому сенсі міра фізичної величини – це деяка числова функція $\mu(\cdot)$, що ставить у відповідність кожній підмножині A з множини значень фізичної величини X деяке невід'ємне (в загальному випадку іменоване) число $N = \mu(A)$. Для міри фізичної величини зберігається аксіоматика міри множин. Певна відмінність пов'язана з необхідністю вимірювання іменованих та від'ємних за значенням фізичних величин. Остання особливість визначається вибором нуля шкали вимірювання і формально може бути врахована штучним введенням, за певною логічною умовою, знака «–», або врахуванням певної константи C :

$\mu(A) = \mu(A) - C$. Наприклад, у випадку переходу від абсолютної температури до температури за шкалою Цельсія $C=273,15$ К.

Характерною властивістю величини є можливість їх вимірювання, тобто $[x_j, x_{j+1})$ порівняння з деякою величиною того ж роду і визначеного розміру, яка за домовленістю прийнята за одиницю вимірювання, тобто за міру. Методологічно використання мір множин для вимірювань можна обґрунтувати наступним чином. Розмір фізичної величини, внаслідок дії сукупності різних обтяжуючих факторів, не може бути визначений з як завгодно високою точністю. Тому весь діапазон вимірювання, наприклад, скалярної фізичної величини X доцільно розбити на напівінтервали виду $X_j, j = 1, 2, 3, \dots$. Кожний з таких напівінтервалів що не перетинаються уявляє певну множину розмірів фізичної величини. На сукупності таких множин можна побудувати числову функцію, що має властивості міри.

В результаті вимірювання отримують неіменоване число N , що виражає відношення розміру x вимірюваної величини X до міри $\mu(1_x)$, визначеної для заданої одиничної множини 1_x значень X . Вибір 1_x і $\mu(1_x)$ встановлюються за домовленістю і обґрунтовується в межах прийнятої системи одиниць фізичних величин. Головна мета вимірювання – встановлення значення x фізичної величини X як встановлення кількісної оцінки її розміру [1]

$$Y = N \cdot \mu(1_x), \quad (1.6)$$

реалізується на основі відтворення матеріальною мірою розміру фізичної величини. В рівнянні (1.6) не враховані похибки вимірювання і відтворення розміру фізичної величини. Ілюстрація процесу вимірювання скалярної величини X у випадку, якщо $\mu(\cdot)$ задана ступінчастою функцією, наведено на рис. 1.11.

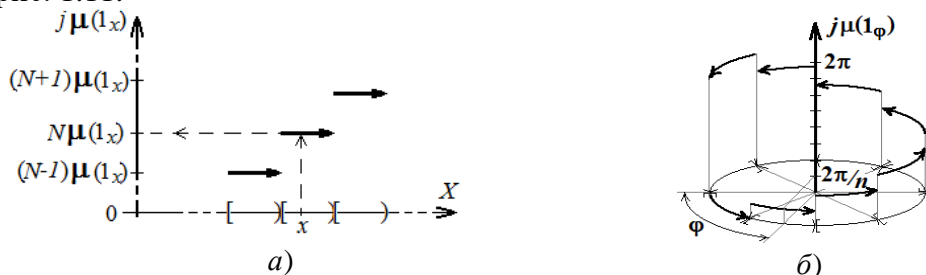


Рис.1.11. Графічна ілюстрація процесу вимірювання фізичної величини розподілених на прямій (а) та на колі (б)

З рис. 1.11,*а* видно, що будь-який розмір фізичної величини з множини її значень в межах кожного з напівінтервалів відображається одним іменованим числом. Однозначні міри фізичних величин відтворюють один її розмір, багатозначні – декілька розмірів. В цілому міри множин і фізичних величин є зовнішніми по відношенню до предмету вимірювання.

Наведені вище відомості про фізичні міри відносяться до розподілених на числовій прямій величин. Тепер розглянемо особливості мір кутових величин, які мають певну специфіку.

Відомо, що для довільного кола з кінцевим значенням радіусу величина центрального кута визначається як відношення довжини дуги, на яку спирається цей кут, до довжини радіусу цього кола. Величина повного центрального кута дорівнює 2π . Природно, що в основу визначення міри кута покладено число π . Міра кута – число π чи його доля, може відтворюватись або фізично за допомогою кругових шкал чи лімбів (що має місце, до прикладу в квадрантах, транспортирах, секстантах тощо), або математично на основі спеціальних розрахунків [49]. Останнє робить кутові вимірювання (до області яких належать і фазові вимірювання циклічних сигналів) особливо привабливими з огляду на забезпечення єдності вимірювань та досягнення високих показників точності.

Ілюстрація процесу вимірювання плоского кута у випадку, якщо його міра $\mu(1_\varphi)$ задана ступінчастою функцією, наведено на рис. 1.11,*б*. В цілому формування значення вимірюваного кута відбувається аналогічно (1.6) з тією відмінністю, що ступінчаста функція задається в циліндричній системі координат. Суттєва особливість формування міри для кутових вимірювань полягає в тому, що область значень кута визначається через коло – замкнену криву. Кутам 0 і 2π відповідає одна точка кола, в якій міра кута має стрибок на 2π .

1.4. Концепція узгодження фізичних та ймовірнісних мір у вимірюваннях

В структурі емпіричних методів пізнання світу вимірювання, внаслідок об'єктивності і інформативності, займають особливе місце. Метрологія, як наука про вимірювання, у своєму розвитку пройшла складний шлях від детерміністського до ймовірнісного підходу. Навіть за останні десятиліття суттєво трансформувалось поняття і зміст вимірювань. Для підтвердження цього факту достатньо навести такі означення вимірювань. В роботі [74] наведено:

«Вимірювання – відображення властивостей об'єкта, які проявляють себе у відношенні еквівалентності, порядку і адитивності обмеженим рядом іменованих натуральних чисел». У міжнародному словнику з метрології VIM-3 (2003) наведено наступне більш широке означення, в якому підкреслено ймовірнісний характер результату вимірювання: «Вимірювання – процес отримання одного чи більше значень величини, які можуть бути обґрунтовано приписані величині». В цьому ж словнику результат вимірювання тлумачиться, як набір значень, що приписуються вимірюваній величині разом з *будь-якою іншою доступною і суттєвою інформацією* (до прикладу це може бути закон розподілу ймовірностей, стандартна чи розширена невизначеність, ймовірність охоплювання тощо). Стохастичний характер вимірювання як процесу підкреслює і інша характеристика – ймовірність охоплювання, тобто ймовірність того, що сукупність істинних значень вимірюваної величини знаходиться у вказаному інтервалі охоплювання. Найчастіше результат вимірювання подають у формі інтервалу охоплювання, що заданий своїми межами і відповідній ймовірності охоплювання [107].

В основі всіх відомих означень вимірювання покладено відображення множини значень вимірюваної величини, якості об'єктів дослідження у число – іменоване чи неіменоване. Таке відображення є найбільш зручним і дозволяє формалізувати результат вимірювання і застосувати математичні методи їх опрацювання. Стисло зупинимось на логіко-математичних поняттях ізоморфізму та гомоморфізму та їх використанні в теорії вимірювань. Ці поняття виражають однаковість (ізоморфізм) чи уподоблюваність (гомоморфізм) будови систем (множин, процесів, конструкцій тощо).

Дві системи, що розглядаються абстрактно від природи їх складових елементів, є ізоморфними одна одній, якщо кожному елементу першої системи відповідає лише один елемент другої і кожному зв'язку в одній системі відповідає зв'язок в іншій і зворотно (рис. 1.12).

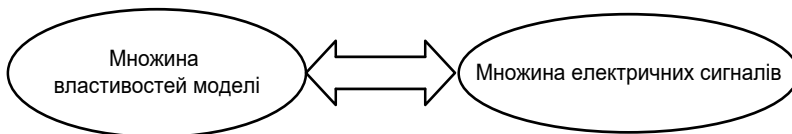


Рис. 1.12. Графічна ілюстрація принципу ізоморфізму

Така взаємно однозначна відповідність називається *ізоморфізмом*. Повний ізоморфізм має місце лише між абстрактними, ідеалізованими об'єктами (наприклад, відповідність між геометричною фігурою і її аналітичним виразом у вигляді формули; відрізок прямої як множина точок і множина дійсних чисел). Найчастіше ізоморфізм пов'язаний не з усіма, а лише з деякими фіксованими в пізнавальному аспекті властивостями і відносинами порівнюваних об'єктів, які в інших своїх відносинах можуть відрізнятися. Саме властивість ізоморфізму дозволяє досліджувати існуючі в об'єкті досліджень (ОД) співвідношення за їх моделлю.

У випадку, коли досліджується дія фізичних законів за відомих умов, виконується теоретичний аналіз математичних формул, рівнянь вимірювань у макросвіті, відображення множин значень якостей досліджуваних величин чи процесів та множин чисел можна вважати ізоморфними.

Доведення або обґрунтування ізоморфізму для завдань вимірювань відіграє фундаментальну роль. Це пов'язано з наступним. У загальному випадку задача вимірювання є оберненою задачею теорії сигналів і систем. У разі доведення ізоморфізму розв'язок такої задачі існує.

На відміну від ізоморфізму «гомоморфізм» – це відповідність об'єктів (систем) однозначна лише *в одну сторону*. Тому гомоморфний образ є неповним, наближеним відображенням структури оригіналу. Відношення гомоморфізму є більш загальними (і більш слабкими). Тому будь-який гомоморфізм є гомоморфізм, але не навпаки.

У вимірювальному експерименті множина M значень властивостей об'єкта дослідження гомоморфна множині M параметрів та характеристик отримуваних інформаційних сигналів. Властива гомоморфізму не взаємооднозначність відображення в загальному випадку дозволяє розв'язувати прямі завдання теорії вимірювань (моделювання) і ускладнює розв'язання обернених завдань (власне отримання результатів вимірювання). Завданням прямої задачі є відшукування наслідків відомих або заданих причин (інформаційних сигналів як функції певних властивостей ОД), тобто "вздовж" причинно-наслідкових зв'язків (рис. 1.13).

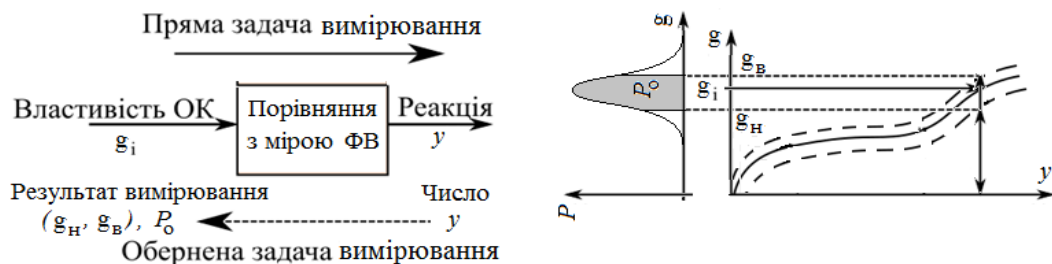


Рис. 1.13. Схематична ілюстрація формування результату вимірювання
(g_b , g_n – верхня і нижня межі невизначеності)

Обернені задачі полягають у відшукуванні причин (властивостей ОД за відомими сигналами), тобто в напрямі "проти" причинно-наслідкових зв'язків. Прямі задачі виникають на етапі проектування, аналізу засобу вимірювання, а обернені задачі – власне під час вимірювання (контролю).

Необхідність спільного використання фізичної і ймовірнісної мір для формування результату вимірювання наведено на рис. 1.14. Фізична міра дає тільки одне число (чи вектор у випадку багатомірних вимірювань). Результат вимірювання, як вектор, утворений певним набором приписаних вимірювань величині значень разом з іншою суттєвою інформацією, формується за допомогою ймовірнісної міри.

В структурі на рис. 1.14 маємо:

1. Сенсор може виконувати перетворення фізичної величини g в іншу – $K(g)$, для якої значно легше створити міру $K_o(g)$.
2. Застосування міри фізичної величини $K_o(g)$ до розміру $K(g)$, в загальному випадку вимірювання поля в точці простору з Декартовими координатами (x, y, z) в момент часу t дає число

$$y(g, x, y, z, t) = [K(g, x, y, z, t) / K_o(g)]^+,$$

де $[\cdot]^+$ – позначення операції виділення цілої частини числа.

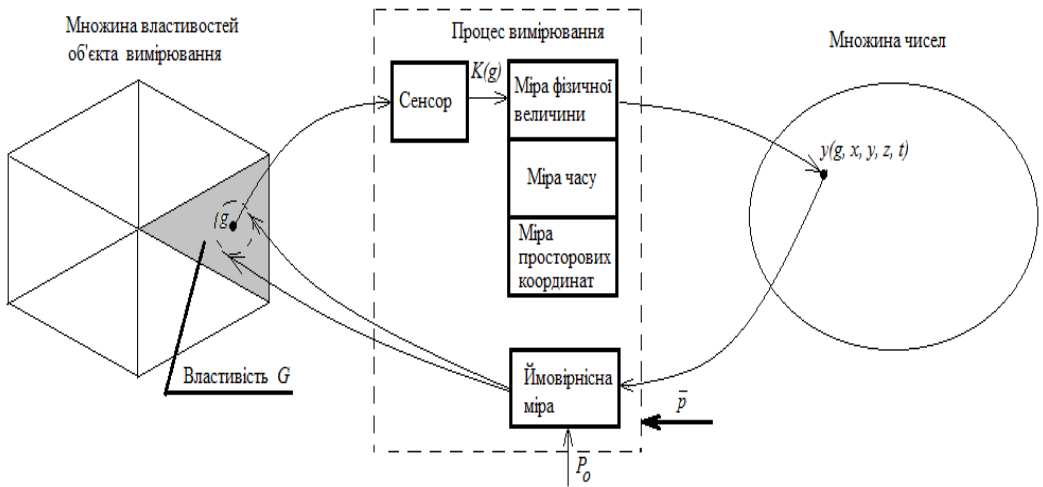


Рис. 1.14. Спільне використання фізичної і ймовірнісної мір у вимірюваннях

3. Внаслідок дії вектора \bar{p} неврахованих впливаючих факторів обернене перетворення $y \rightarrow g$ дає не одне значення, а певний окіл.

4. Результат вимірювання отримуємо не тільки як наслідок технічних засобів порівняння розміру вимірюваної фізичної величини зі значенням, прийнятим за одиницю її вимірювання, але й як результат застосування ймовірнісної міри, певного математичного апарату та математичної статистики.

5. Перетворення різних фізичних величин у кутову величину (плоский кут, фазовий зсув сигналів) є зручним типом перетворення, оскільки одиниця вимірювання останньої – радіан (або число π), відтворюється засобами обчислювальної техніки з практично необмеженою точністю незалежно від місця і часу проведення вимірювань.

6. Стохастичний підхід в теорії вимірювань набуває особливого значення у випадку вимірювань фізичних величин, що мають яскраво виражену ймовірнісну природу, наприклад, у випадку нановимірювань, дослідженні квантових ефектів тощо.

Отже, отримання змістовного результату вимірювання ґрунтується на використанні *узгодженої, нерозривно поєднаної сукупності* фізичних та ймовірнісних мір, класифікація яких наведена на рис. 1.15.



Рис. 1.15. Класифікація фізичних і ймовірнісних мір для вимірювань

Приклад використання мір в інформаційно-вимірювальних системах (ІВС). Вирішення завдання забезпечення однорідності і стаціонарності міри в теорії ІВС в кожному конкретному випадку вимірювання має свою специфіку і характерні особливості. В той же час можна виділити загальні властивості використання і види міри:

М1 – міра одиниці величини;
 М2 – міра одиниці просторових координат місця проведення вимірювань;
 М3 – міра одиниці часу проведення вимірювань;
 М4 – ймовірнісна нормована міра результату і точності вимірювань при статистичному опрацюванні даних вимірювань;
 М5 – міра захисту інформації конкретного процесу вимірювань.

На рис. 1.16 наведено схематичне зображення використання вказаних мір при перетворенні вимірювальної інформації функціональними модулями ІВС.

Частинний випадок захисту інформації – підвищення завадостійкості вимірювань, застосовується практично для всіх процесів вимірювань. У структурі ІВС, зазвичай, є модуль фільтрації сигналів, що забезпечує підвищення співвідношення сигнал/завада на своєму виході.

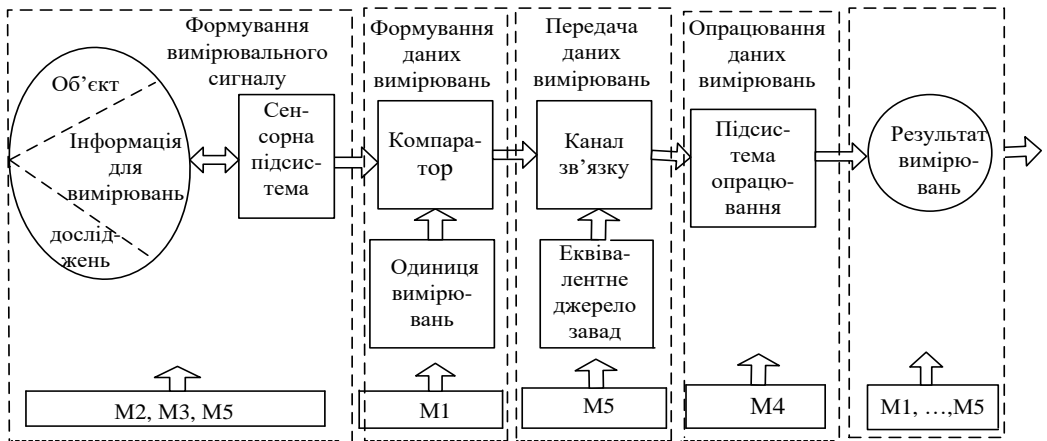


Рис. 1.16. Схематичне зображення використання різних мір в структурі ІВС

У випадку вимірювань $n(n > 1)$ величин є n мір одиниць досліджуваних величин. Перші три міри є фізичними мірами (у загальному випадку маємо $n+2$ мір), які реалізуються відповідними еталонами мір з заданою точністю. Однорідність і стаціонарність таких мір визначаються характеристиками технічних пристроїв і систем їх формування. Це дає можливість в певній мірі управляти забезпеченням однорідності і стаціонарності фізичних мір, при проведенні процесу вимірювань в різних місцях простору і в різні часи, забезпечуючи при цьому порівняння результатів вимірювання і таким чином виконати вимоги єдності вимірювань.

Ймовірнісна нормована міра є нефізичною мірою, а мірою сукупності дій різних випадкових факторів на значення і характеристики даних і результату вимірювань під час їх проведення. Використання ймовірнісної міри при статистичному опрацюванні даних вимірювання дає можливість підвищити точність результату вимірювань у порівнянні з точністю даних вимірювань.

Міра захисту інформації при вимірюваннях є комплексною. Міра формується значною кількістю факторів, дія більшості з яких має випадковий характер. Це дає можливість таку міру визначати як ймовірнісну, яка може бути застосована як для окремих операцій, наприклад передача даних вимірювань по каналах зв'язку, реєстрації результату вимірювань так і для всього процесу вимірювання у цілому.

Значення точності вказаних п'яти мір трансформуються відповідно у значення точності даних і результатів вимірювань у відповідних модулях ІВС.

1.5. Вимірювання як обернена задача теорії сигналів і систем

Обґрунтуємо використання ряду відомих методів і формулювання ряду постановок задач вимірювання, які відображають ті чи інші грані різноманітності і різноплановості проблематики вимірювання і підкреслюють основну роль моделей і мір їх вирішення. Природно, що такі постановки задач і методи їх розв'язання використовують результати останніх досягнень ряду природничих і технічних наук, в тому числі математичного аналізу, математичної фізики, квантової механіки, обчислювальної математики, теорії ймовірностей і математичної статистики, теорії сигналів і систем, теорії автоматичного управління, вимірювання і цифрового опрацювання сигналів та ін.

Задача вимірювання як базова задача зменшення невизначеності результатів досліджень. Термін або поняття *невизначеність* (англ. *uncertainty*) має широкий діапазон тлумачень і інтерпретацій за аналогією з поняттями *інформація* і *множина*. У широкому розумінні у *поняття невизначеності* вкладається наступний зміст: це степінь незнання про досліджуваний об'єкт, який може бути зменшений шляхом виконання певних операцій з отримання кількісної інформації і це підтверджено реальними фактами.

Так, відомий французький вчений в області фізики і теорії інформації професор Сорбонни (Франція), Гарварда і Колумбійського університету (США) Л. Брьоллен у своїх працях «Наука и теория информации» (1962), «Научная неопределенность и информация» (2010) відмічав наступне. Досягнуті успіхи науки в таких галузях, як термодинаміка, класична і квантова механіка, статистика і інформація отримано завдяки існуючій на той час інформаційній

невизначеності при дослідженнях відповідних явищ і об'єктів. Також відмічалося, що наведені приклади досягнень отримані з певними показниками точності. Цікавий висновок автора про методологію наукових досліджень, а відповідно, і методологію досліджень метрології як емпіричної науки: «... всі ці проблеми, також як і сама наука, ніколи не будуть завершені. Повне завершення означало би смерть для любого дослідження».

Термінологія невизначеності почала з'являтися у наукових публікаціях у першій половині XX століття і вона відносилась тільки до проблематики вимірювання. Відомий принцип невизначеності квантової механіки (принцип німецького фізика-ядерщика Гейзенберга, 1927 р.) визначає межі характеристик точності (середньоквадратичних значень) одночасного вимірювання просторової координати квантової частинки x з імпульсною енергією e у вигляді:

$$\sigma_x \cdot \sigma_e \geq h/2,$$

де $h = 6.626070040(81) \cdot 10^{-34}$ (Дж·с) – приведена постійна Планка, σ_x і σ_e – середньоквадратичні відхилення даних вимірювань.

Подальші дослідження підтвердили факт використання принципу невизначеності вимірювань не лише у квантовій механіці (мікросвіті) а й у класичній механіці, електродинаміці (макросвіт). Це одночасні вимірювання струму і напруги, характеристик електричного і магнітного полів, часових і частотних характеристик радіолокаційного сигналу. В той же час, наведений вище принцип невизначеності відноситься до одночасно двох вимірюваних величин, зв'язаних між собою функціонально, але для кожної із них окремо не накладає ніяких обмежень відносно точності вимірювань.

Як показала теорія і практика вимірювання фізичних величин, невизначеність існує і проявляється при кожному вимірювальному експерименті.

Враховуючи широке тлумачення поняття невизначеності і з метою більш конкретного його використання пропонується наступна класифікація:

невизначеність у широкому сенсі як якісна характеристика;

невизначеність у вузькому сенсі як кількісна характеристика, в основному, при оцінюванні кількісного результату вимірювання.

1993 рік став роком революційної зміни в обґрунтуванні використання поняття невизначеності при оцінюванні результатів вимірювання. Робоча група Міжнародної метрологічної спільноти, в тому числі: Міжнародне бюро мір і ваг (МБМВ або BIMP), Міжнародна електрична комісія (МЕК або IEC), Міжнародна організація із стандартизації (МОС або ISO) та ін., в 1993 році

опублікували Керівництво по визначенню невизначеності вимірювань (uncertainty of measurement) – GUM [124].

Дана публікація офіційно на міжнародному рівні ввела поняття *невизначеності результату вимірювання*. Наприклад, згідно нормативного документу ISO 14064-1-2007 означення невизначеності наведено у такій редакції.

Невизначеність (uncertainty) – це оцінка, яка приписана результату вимірювання і яка характеризує діапазон значень, в якому, як можна вважати, лежить істинне значення.

У загальному випадку невизначеність вимірювання включає багато складових. Деякі з них можуть бути оцінені із статистичного розподілу послідовності даних вимірювання і характеризуватися стандартним відхиленням (середнім квадратичним відхиленням, СКВ). Оцінки других складових можуть ґрунтуватися лише на попередньому досвіді або іншій інформації.

На сьогодні міжнародна метрологія, включаючи Україну, в оцінюванні якості результатів вимірювання перейшла від одної концепції, яку іменують класичною (Classical Approach, CA), до нової Концепції, що ґрунтується на невизначеності вимірювання (Uncertainty Approach, UA). Згідно нової Концепції UA (Концепції невизначеності) замість фундаментального поняття *похибка вимірювання*, яка застосовує відоме або гіпотетичне істинне значення фізичної величини, використовується *невизначеність вимірювання*, якій відповідає діапазон (інтервал) значень місця знаходження істинного значення величини.

Таким чином, основним показником якості вимірювання є невизначеність результату вимірювання. Зменшення невизначеності є ознакою підвищення ефективності, тобто підвищення точності вимірювання. Тим самим невизначеність може бути вибрана в якості критерію для оцінювання якості різних вимірювальних операцій, в першу чергу функціонування засобів і систем вимірювання.

Сформулюємо практичні рекомендації використання концепції невизначеності.

Так, наприклад, якщо адаптувати невизначеність до даних вимірювань фізичної величини, математична модель якої описується випадковою величиною з невідомими математичним сподіванням і дисперсією (середнім квадратичним відхиленням) – функцією невизначеності вимірювання, то невизначеність істинного значення досліджуваної величини можна оцінити із заданою ймовірністю довірчим інтервалом з відповідними статистичними оцінками математичного сподівання і дисперсії, або іншими методами, які по суті формують таку ж інформацію.

Для одновимірного випадку результат вимірювання подається у вигляді:

$$y = \bar{x} \pm \Delta x [x] \quad (1.7)$$

де y – результат вимірювання, \bar{x} – опорне значення результату вимірювання (в більшості випадків, це середнє арифметичне при багаторазових вимірюваннях або оцінка математичного сподівання випадкової величини), Δx – розширена невизначеність результату вимірювання, $[x]$ – одиниця вимірювання.

Враховуючи різнорідність і різноплановість задач вимірювання, значення невизначеності вимірювання визначається в залежності від постановки конкретної задачі по різному, а саме:

- стандартна невизначеність вимірювання типу А;
- стандартна невизначеність вимірювання типу В;
- сумарна стандартна невизначеність вимірювання;
- розширена невизначеність вимірювання.

Відомо, що результат вимірювання фізичної величини Y представляється іменованим числом y . Наприклад, $y = (10, 2 \pm 0, 1)$ м – це запис результату вимірювання довжини в одиницях системи СІ.

У відповідності з Концепцією невизначеності узагальнене рівняння вимірювання має вид:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m). \quad (1.8)$$

В даному рівнянні Y – результат вимірювання, який представлений багатовимірною функцією $f(\{X_j, j = \overline{1, m}\})$, область значення якої однозначно визначається числовими значеннями, отриманими за даними вимірювання множини аргументів $\{X_j, j = \overline{1, m}\}$.

Для кожного конкретного випадку процесу вимірювання рівняння вимірювання виду (1.8) приймає відповідну функціональну залежність, для вирішення якої використовується той чи інший метод вимірювання з подальшою його реалізацією апаратно-програмними засобами (системами).

Методи аналізу і синтезу в завданнях вимірювання. Розглянемо методи аналізу і синтезу теорії сигналів і систем адаптовані до задач вимірювання. Для опису використання таких методів буде розглянутий наступний одновимірний варіант задачі вимірювання.

Постановка задачі вимірювання. На вхід засобу вимірювання надходить сигнал, який описується функцією невизначеності у вигляді адитивної суми

детермінованої функції часу $s(t)$ і завади – стаціонарного гауссового випадкового процесу $\xi(\omega, t)$ з нульовим математичним сподіванням за фіксованого значення t , тобто:

$$\eta(\omega, t) = s(t) + \xi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T. \quad (1.9)$$

Засіб вимірювання, як апаратно-програмний засіб, описується оператором перетворення вхідного сигналу $Z[\cdot]$. На виході засобу необхідно отримати відгук – результат вимірювання у виді

$$y_t = \bar{s}_t + \Delta s, \quad (1.10)$$

де \bar{s}_t – опорне значення сигналу $s(t)$ за фіксованого t , а Δs – відповідне значення його невизначеності.

Схематично таку постановку задачі вимірювання можна представити рис. 1.17.

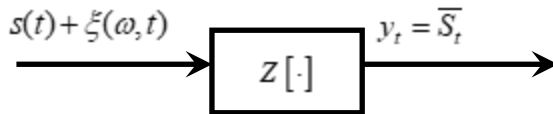


Рис. 1.17. Схематична ілюстрація задачі вимірювання з використанням засобу вимірювання

Розглянемо наступні методи аналізу і синтезу перетворень інформаційних сигналів засобами і системами вимірювання. Незважаючи на той факт, що методи аналізу і синтезу ідейно різні, їх взаємозв'язок при використанні доповнюють один одного для розв'язання задач вимірювання.

Метод синтезу. На основі цього методу розв'язуються відомі задачі оптимізації визначення оператора перетворення засобу вимірювання $Z[\cdot]$ у відповідності із заданим критерієм оптимальності. Єдиним критерієм оптимальності для задач вимірювання є мінімізація значення невизначеності вимірювання фізичних величин (типи А бо В, сумарна стандартна або розширена).

Таким чином на класі функцій невизначеності вимірювання фізичних величини оптимальний оператор перетворення $Z[\cdot]$ засобу вимірювання мінімізує невизначеність результату вимірювання у відповідності з використанням методу синтезу.

Методи аналізу. Використання цього методу у порівнянні з методом синтезу має більшу номенклатуру задач, а саме:

Пряма задача. Задані вхідна дія – функція невизначеності вимірювання фізичних величин $s(t)$ і оператор перетворення $Z[\cdot]$. Необхідно знайти характеристики відгуку, тобто $y(t) = Z[s(t)], t \in T$.

Обернена задача. Задані відгук $y(t)$ – результат і невизначеність вимірювання, оператор перетворення $Z[\cdot]$ засобу вимірювання, а необхідно визначити характеристики і саму функцію невизначеності вимірювання $x(t)$ фізичної величини або їх сукупності.

Задача ідентифікації. Така задача іменується задачею чорного ящика. Необхідно визначити оператор перетворення $Z[\cdot]$ засобу вимірювання по заданим функціям $s(t)$ та $y(t)$.

Результати використання методів аналізу і синтезу опубліковані в значній кількості науково-технічних робіт по теоріях сигналів і систем, автоматичного управління, оптимальних систем та ін. В метрології і в першу чергу, в теорії інформаційно-вимірювальних систем, обернена задача і задача ідентифікації є типовими задачами вимірювання.

На рис. 1.18 наведена ілюстративна схема оберненої задачі вимірювання. Тобто, для отримання необхідної інформації за результатами вимірювання потрібно вирішити обернену задачу, а саме:

$$s(t) = Z^{-1}[y(t)],$$

де $Z^{-1}[\cdot]$ – обернений оператор для заданого оператора перетворення $Z[\cdot]$ засобу вимірювання.

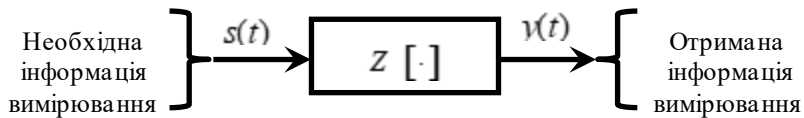


Рис. 1.18. Ілюстративна схема оберненої задачі вимірювання

У загальному випадку обернені задачі є актуальними не тільки для вимірювань, а й для математичної фізики, термодинаміки, геофізики, геодезії, астрономії, медичної візуалізації, включаючи комп'ютерну томографію, дистанційного зондування Землі тощо. Обернені задачі у більшості практичних випадків є некоректно поставленими і мають значну складність для їх розв'язання. Методи і результати розв'язання обернених задач опубліковані у значній кількості науково-технічних публікацій. Так, наприклад, відомі публікації: «Методы решения некорректных задач» Тихонова А.Н. та Арсенина 38

В.Я. (1974); «Обратные задачи теплопроводности» в двух томах Мацевитого Ю.М. (2002).

На практиці задачі ідентифікації засобу вимірювання завжди вирішуються з метою підтвердження їх метрологічних характеристик. Проводиться серія натурних вимірювальних експериментів кожного засобу (системи) вимірювання і визначаються реальні метрологічні характеристики його оператора перетворення $Z[\cdot]$. Необхідно відмітити, що ідентифікація оператора перетворення $Z[\cdot]$ для кожного засобу вимірювання є складною задачею і ця складність обумовлена наступним. Оператор перетворення $Z[\cdot]$ реалізує рівняння вимірювання (1.8) та інтегрально описує послідовність виконання таких вимірювальних операцій:

взаємодію об'єкта дослідження з первинним вимірювальним перетворювачем (сенсором, датчиком) і формування на його виході вимірювального сигналу як фізичного носія інформації вимірювання;

формування даних вимірювань числових значень сформованого сигналу на основі порівняльної операції з одиницею (шкалою) досліджуваної фізичної величини;

передачі даних вимірювань по каналу передавання інформації і врахування дії завад;

опрацювання даних вимірювань при дії завад і визначення результату та невизначеності вимірювання.

Таким чином оператор перетворення $Z[\cdot]$ засобу (системи) вимірювання є складовим оператором, який формується послідовністю операторів модулів засобу вимірювання.

У попередньому п. 1.4 були розглянуті загальні умови розв'язання оберненої задачі вимірювання. Ідеалізований випадок ізоморфного перетворення інформаційного сигналу $s(t)$ відповідним оператором $Z[\cdot]$ засобу вимірювання на практиці не має місця. Тому розв'язання такої задачі отримується на основі використання концепції поєднання фізичних і ймовірнісних мір.

2. МОДЕЛІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ТА ПОЛІВ

2.1. Математичні моделі сигналів та їх класифікація

Для виконання завдань вимірювання використовуються чотири варіанти формування первинної інформації при взаємодії різних об'єктів дослідження (ОД) з системою вимірювання [95]:

- а) ОД є джерелом (генератором) вимірювальної інформації;
- б) ОД є лінійним чи нелінійним, інерційним чи безінерційним, одновимірним чи багатовимірним перетворювачем впливу (сигналу), що діє на ОД, і який умовно називають тестовим, а сам ОД описується певним оператором перетворення $Z[\cdot]$;
- в) ОД є джерелом, яке формує власну, відмінну від входної, реакцію (відгук), а входний сигнал впливу вважають стимулом чи подразником;
- г) характер динаміки (зміни в часі) досліджуваних властивостей, станів і характеристик ОД задається системою вимірювання, вірніше системою вимірювання та управління.

Схемна ілюстрація варіантів такої взаємодії зображена на рис. 2.1.

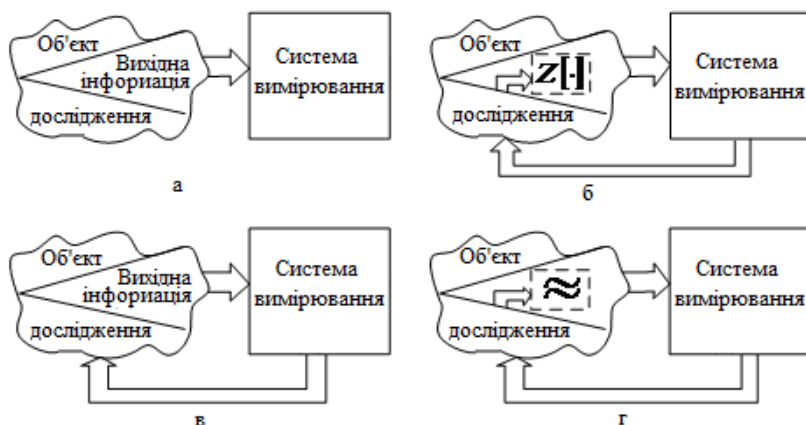


Рис. 2.1. Схемна ілюстрація варіантів взаємодії ОД з системою вимірювання

Для першого варіанта (рис. 2.1,а) основною математичною моделлю сигналу є випадковий процес або комбінація детермінованих і випадкових процесів, характеристики яких відображають властивості ОД. У варіантах на рис. 2.1,б-г передбачено формування тестових сигналів, які задаються системою вимірювання, а їх модель обґрунтовується виходячи з особливостей ОД, умов та завдань вимірювання. Ці моделі можуть бути детермінованими, випадковими або їх комбінаціями.

Вхідні сигнали зазнають впливу ОД, внаслідок чого їх характеристики змінюються, а самі сигнали стають фізичними носіями інформації. Такі сигнали іменуються вимірювальними [2].

Можливості сучасної науки та техніки дозволяють реалізувати три напрями досліджень процесу вимірювання [95]:

математичне моделювання на основі розроблення інформаційного забезпечення, використання засобів обчислювальної техніки і проведення обчислювального (комп'ютерного) вимірювального експерименту;

фізичне моделювання на основі використання фізичних моделей ОД, як однорідних за фізичною природою, так і іншої фізичної природи, яке включає обґрунтований вибір засобів вимірювання і проведення імітаційного вимірювального експерименту;

експериментального або натурного дослідження реального ОД на основі використання засобів вимірювань і проведення натурного вимірювального експерименту.

Основою для таких досліджень є математичні моделі сигналів, аргументами яких в загальному випадку є просторові змінні $(x, y, z) = \mathbf{r} \in G \subseteq R^3$ і часу $t \in T \subseteq R$.

Щоразу перед дослідником постає питання: яким чином вибрати досить просту модель, яка б в той же час достатньо повно відображала основні та суттєві властивості фізичного процесу? Процес створення і дослідження математичної моделі сигналу складається з наступних етапів [66].

На *першому* етапі проводиться аналіз отриманих результатів досліджень основних фізичних законів, впливу різних факторів та інших відомостей при формуванні сигналу у просторі і часі. На цій основі з використанням математичних об'єктів, термінів і символів створюється нове відображення – математична модель сигналу, як правило в аналітичній формі.

На *другому* етапі вирішується широке коло теоретичних та прикладних завдань вимірювань, в яких використовується модель сигналу.

На *третьому* етапі оцінюється узгодженість результатів теоретичних та практичних досліджень сигналу на основі вибраних критеріїв. У деяких наукових працях для оцінювання результатів порівняльного аналізу використовують термін *адекватна модель*. Слід зауважити, що мова в такому випадку йде не про порівняльний аналіз двох різних за фізичною природою об'єктів (математичного і матеріального), а в порівнянні характеристик, параметрів, закономірностей тощо, які були одержані під час узгодженого дослідження моделі та фізичного явища.

Четвертий етап полягає у побудові більш вдосконаленої або нової моделі у випадку, коли результати аналізу нових одержаних даних, фактів про ОД не відповідають запропонованій моделі. В деяких випадках, наприклад,

для гармонічних сигналів, необхідність виконання такого етапу у повному обсязі може і не виникнути – коригуванню можуть піддаватись лише певні параметри чи характеристики моделі.

Дослідження моделей сигналів як математичних об'єктів у завданнях вимірювань проводиться з використанням методів функціонального аналізу, теорії міри, теорії випадкових процесів та математичної статистики, теорії сигналів і систем, математичної фізики та теорії вимірювань [3, 6, 7, 66, 74, 95].

Для описання моделей сигналів використовуються функції однієї або кількох змінних, вектори та матриці. Моделі можуть задаватись графіками, таблицями та аналітичними виразами (в переважній більшості випадків). Функції можуть бути випадковими й не випадковими, набувати дійсних та комплексних значень.

Одновимірний сигнал описується функцією одного аргументу $\{u(x), x \in X\}$. Якщо аргументом функції $u(x)$ є час, тобто $u(t)$, компоненти послідовності одновимірних сигналів $\{u_i(t), t \in T\}$, $i = \overline{1, n}$ є функціями часу.

Прикладами таких сигналів є напруги на виході генераторів гармонічних та імпульсних сигналів, системи акустичних перетворювачів та ін.

Термін *багатовимірний сигнал* потребує певної конкретизації.

Упорядкований набір із n одновимірних сигналів $\left\{u_i(x), i = \overline{1, n}\right\}$ створює так званий багатоканальний сигнал, який описується вектором $u_n(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$, $t \in T$. Число n – *розмірність вектора* $u_n(t)$ визначається кількістю вихідних каналів досліджуваної системи.

Сигнальне поле, або поле сигналу, описується функцією кількох (не менше двох) змінних (аргументів) $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. У випадку, коли одна із змінних розуміється як час, а три інших – як змінні простору, тобто $u(r; t) = u(x, y, z; t)$, або $u(x, y; t)$, або $u(x; t)$, то моделі сигнальних полів називаються *просторово-часовими*. Одну з реалізацій такого поля зображено на рис. 2.2.

Прикладом складних математичних моделей є *векторне сигнальне поле* виду

$$u_n(r; t) = \{u_1(r, t), \dots, u_n(r, t)\}, \quad r \in G, \quad t \in T.$$

Сигнали можна поділити на *неперервні* та *дискретні*, але при цьому необхідно вказати характер їх областей визначення і значень.

Термін *цифрові сигнали* використовується для опису дискретних сигналів як за часом, так і за значенням з подальшим їх кодуванням. Для цього обирають одну з відомих числових систем: двійкову, вісімкову, шістнадцяткову і т.д. У цифровій обробці сигналів пріоритет належить двійковій системі, тому цифрові сигнали в більшості випадків – це числові послідовності двійкових символів зі скінченним числом розрядів, наприклад 11001110011.

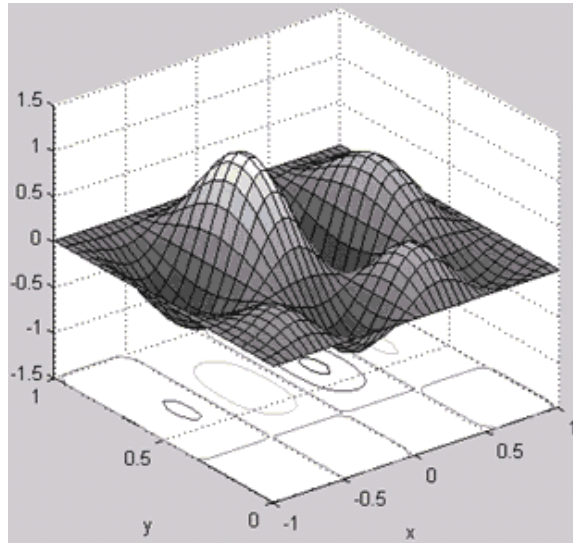


Рис. 2.2. Приклад реалізації сигнального поля

Імпульсні сигнали описуються *фінітними* функціями, тобто функціями, які набувають ненульових значень тільки на скінченних інтервалах часу. Слід відзначити, що мають місце й інші визначення імпульсних сигналів, наприклад послідовність сигналів, які на осі часу не перетинаються.

При описанні багатовимірних сигналів число варіантів неперервності та дискретності збільшується. До прикладу, сигнальне поле може бути дискретним за часом, неперервним за просторовими аргументами та дискретним за значеннями.

Знання математичних моделей сигналів дає змогу проводити їх порівняльний аналіз, визначати їх числові характеристики (параметри), оцінювати результати вимірювань, установлювати тотожність і розбіжності сигналів та класифікувати їх. Як правило назва вимірювального сигналу визначається видом його математичної моделі, наприклад, детерміновані сигнали описуються детермінованими функціями, випадкові – випадковими функціями.

Проблема класифікації сигналів. Вирішення цієї проблеми для моделей сигналів (далі просто сигналів) є актуальною і важливою для вимірювання. Значення, параметри і характеристики сигналів є предметами досліджень різноманітних і різнопланових завдань вимірювань, тому кількість видів або класів вимірювальних сигналів є значною. Наприклад, якщо сигнали класифікувати за видами функцій у функціональному аналізі, то їх кількість може сягати тисячі. Якщо класифікувати за законами розподілу випадкових сигналів, то їх кількість перевищить три сотні. У випадку класифікації сигналів з більш загальних позицій, а саме за умови обґрунтування просторів функцій, їх кількість перевищить кілька десятків. До таких просторів належать векторний, лінійний, метричний, нормований, вимірний з мірою, ймовірнісний, гільбертів тощо [2, 33, 54, 66].

Будь-яка класифікація є умовною і залежить від її мети і ознак, у подальших матеріалах даної роботи буде наведено приклади типових сигналів, які знайшли широке використання при вирішенні завдань теорії і практики вимірювань.

Неперервні і дискретні сигнали. У залежності від характеру областей визначення та значень сигналу $\{s(t) \in R, t \in T\}$ виділимо чотири види сигналів, ознаки яких наведено в табл. 2.1:

неперервні (аналогові) – сигнали, які набувають довільні значення і визначені для будь-якого моменту часу t ;

дискретні за часом з інтервалом дискретизації Δt – сигнали, довільні за величиною, але задані не на всій вісі часу, а лише у визначені моменти часу $t_i = (i-1)\Delta t$, де $i = 1, 2, \dots$;

квантовані з інтервалом квантування Δs – сигнали, які є неперервними у часі функціями $s(t)$, що набувають лише дискретні значення $s_j = (j-1)\Delta s$ при $j = 1, 2, \dots$;

цифрові – сигнали, дискретні за рівнем і за часом, а також кодовані, тобто кожному відліку ставиться у відповідність число зі скінченною кількістю розрядів.

Таблиця 2.1

$s(t)$, область $t \in T$, значень область визначення	Неперервна	Дискретна
неперервна	<i>неперервні (аналогові)</i>	<i>квантовані</i>
дискретна	<i>дискретні за часом</i>	<i>цифрові</i>

Комплекснозначні сигнали. Усі розглянуті раніше моделі сигналів належать до класу дійсних. Математична модель комплексних сигналів подається у загальному вигляді формулою

$$\dot{z}(t) = x(t) + iy(t), \quad (2.1)$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – дійсні сигнали; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Частковим випадком (2.1) є так званий комплексно-експоненціальний сигнал, який має вигляд:

$$\dot{z}(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \phi_0)},$$

де A, ω_0, ϕ_0 – відповідно амплітуда, кругова частота та початкова фаза сигналу.

Скориставшись формулою Ейлера цей сигнал можна подати у виді:

$$\dot{z}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + iA \sin(\omega_0 t + \phi_0).$$

Періодичні сигнали. *Періодичність* також може бути класифікаційною ознакою сигналів. За цією ознакою виділяють: *періодичні* та *аперіодичні* (поодинокі) сигнали.

Загальна форма математичної моделі періодичного сигналу має вигляд:

$$s(t) = s(t + nT_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.2)$$

де T_0 – період сигналу. Приклади графіків реалізації періодичних сигналів зображено на рис. 2.3:

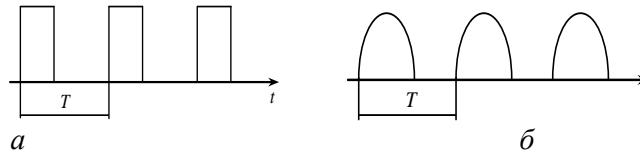


Рис. 2.3. Графіки реалізацій періодичних сигналів:
а — прямокутних; б — зрізаних косинусних

Аперіодичний (імпульсний чи поодинокий) сигнал $s(t)$ є частковим випадком періодичного сигналу, коли період T_0 прямує до нескінченності, тобто $s(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} s(t + nT_0)$.

Гармонічні і модульовані сигнали. Математична модель гармонічного сигналу описується виразом

$$u(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad t \in T, \quad (2.3)$$

де A_0 – амплітуда, f_0 – частота, $2\pi f_0$ – кругова частота, $T_0 = 1/f_0$ – період. Значення $2\pi f_0 t + \phi_0$ – для фіксованого t іменується фазою сигналу, а значення фази за $t = 0$, тобто параметр ϕ_0 , іменується початковою фазою.

Широке коло застосувань моделі гармонічного сигналу обумовлено такими фактами:

значна кількість природних явищ, процесів, сигналів сформованих технічними системами, для яких характерна властивість циклічності, регулярності, ритмічності, тобто повторюваності у часі або у просторі, можна описати ідеалізованою математичною моделлю (2.3);

використання сигналу (2.3) має глибокі історичні корені – це дослідження італійського фізика і астронома Галілео Галілея (1564-1642) коливальних рухів, розробки маятникових та пружинних годинників, як механічних коливальних систем, нідерландського фізика Христіана Гюйгенса (1629-1695), праці англійського фізика Роберта Гука (1635-1703) в теорії коливань і результати досліджень відомого французького математика Жана Батиста Жозефа Фур'є (1768-1830), як засновника гармонічного аналізу в математиці і фізиці;

ціла галузь народного господарства розвинутих країн світу – приладобудування у середині і другій половині двадцятого століття виробляла значну кількість вимірювальних приладів і систем вимірювання параметрів сигналу (2.3), в тому числі вольтметри, амперметри, частотоміри і фазометри;

модель (2.3) є складовою компонентою інших більш складних інформаційних сигналів.

За умови зміни параметрів гармонічного сигналу, а саме, амплітуди, частоти чи фази формується ряд модульованих сигналів з гармонічним сигналом-носієм. Такими модульованими сигналами є: амплітудно-модульовані; частотно-модульовані і фазо-модульовані. Останні два види модуляції гармонічного сигналу у загальному випадку розглядаються як сигнали з кутовою модуляцією. Графіки реалізацій амплітудно-модульованого сигналу з різними коефіцієнтами модуляції k_A наведено на рис. 2.4.

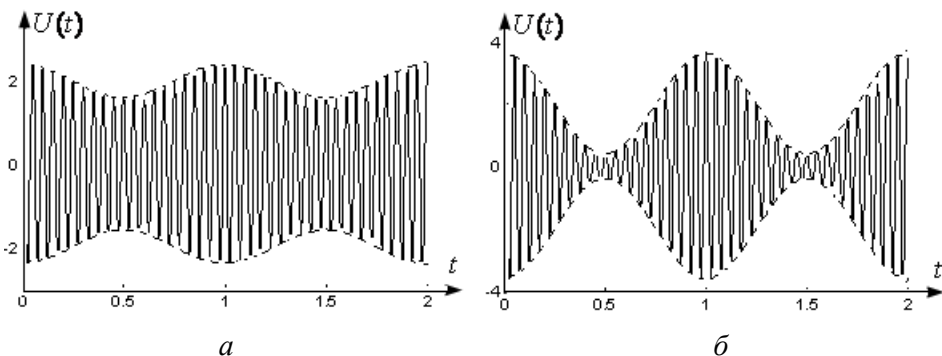


Рис. 2.4. Графіки реалізації амплітудно-модульованих сигналів з різними значеннями k_A : а) $k_A = 0,2$; б) $k_A = 0,8$

Більш детально результати досліджень модульованих сигналів з гармонічним сигналом-носієм розглянуті у [4, 50, 54, 80].

Імпульсні і модульовані імпульсні сигнали. Для представлення імпульсних сигналів використовується одинична функція Хевісайда виду

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Періодична послідовність прямокутних імпульсів з використанням (2.4) описується виразом

$$u(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau_0 + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)], \quad (2.5)$$

де T_0 – період слідування, τ_0 – тривалість, $A_0 > 0$ – амплітуда імпульсів є параметрами послідовності прямокутних імпульсів.

Графік реалізації періодичної послідовності імпульсів для конкретно заданих n , T_0 , τ_0 і A_0 наведений на рис. 2.5.

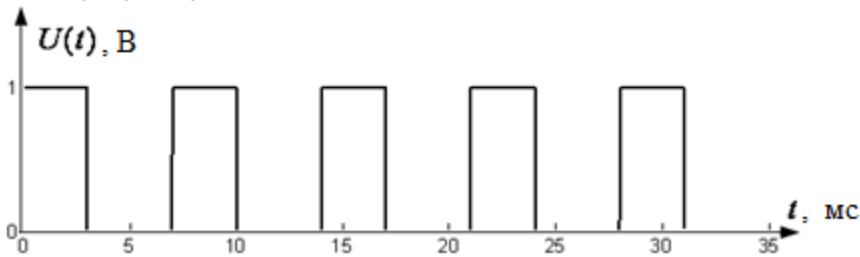


Рис. 2.5. Графік реалізації періодичної послідовності прямокутних імпульсів

За умови зміни у часі параметрів періодичної послідовності прямокутних імпульсів, а саме: амплітуди, тривалості і періоду слідування, формується ряд модульованих імпульсних сигналів за аналогією з модульованими сигналами з гармонічним сигналом-носієм.

Розглянемо деякі види модульованих імпульсних сигналів.

Амплітудно-модульований імпульсний сигнал або сигнал з амплітудно-імпульсною модуляцією (АІМ) з використанням (2.5) описується виразом

$$U_{\text{Аіі}}(t) = \sum_{k=0}^n A(t) [\Phi(\tau_0 + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)], \quad (2.6)$$

де відповідно функція $A(t)$ є результатом модуляції інформаційним сигналом параметра A_0 послідовності імпульсів.

При вимірюваннях також використовується послідовність радіоімпульсів, яка описується виразом

$$u_{pi}(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau_0 + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)] \cos 2\pi ft, \quad t \in T. \quad (2.7)$$

На рис. 2.6 наведений графік реалізації послідовності радіоімпульсів виду (2.7) за відповідних параметрів цієї моделі.

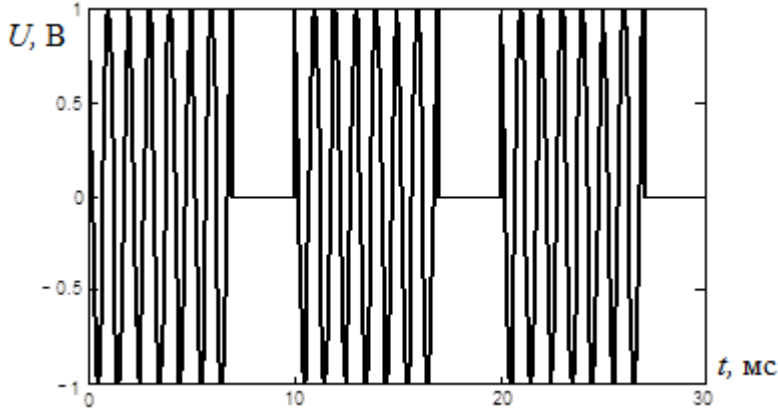


Рис. 2.6. Графік реалізації послідовності радіоімпульсів

Широтно-імпульсна модуляція (ШІМ) сигналу (2.5) або сигналу з ШІМ описується виразом

$$u_{ШІМ}(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau(t) + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)], \quad (2.8)$$

де функція $\tau(t)$ є результатом модуляції інформаційним сигналом параметра τ_0 послідовності імпульсів.

Як приклад функції $\tau(t)$ розглянемо таку:

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{\tau_0}{k+1}, & kT_0 \leq t < (k+1)T_0, \quad k = \overline{0, n}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Графік реалізації такого ШІМ сигналу за певних параметрів моделі (2.8) наведений на рис. 2.7.

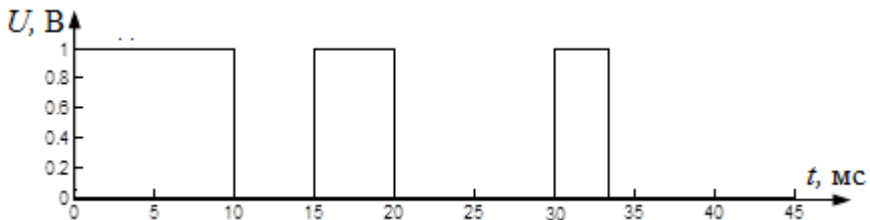


Рис. 2.7. Графік реалізації ШІМ сигналу

Частотно-імпульсна модуляція (ЧІМ) сигналу виду (2.5) або ЧІМ-сигналу описується виразом

$$u_{\text{ЧІМ}}(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau_0 + kT(t) - t) - \Phi(kT(t) - t)], \quad \tau_0 < \frac{T_0}{2}, \quad (2.9)$$

де функція $T(t)$ є результатом модуляції інформаційним сигналом параметра T_0 моделі (2.5).

Як приклад функції $T(t)$ розглянемо наступну:

$$T(t) = \begin{cases} \frac{(k+1)T_0}{2}, & kT_0 \leq t < (k+1)T_0, \quad k = \overline{0, n}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Графік реалізації ЧІМ сигналу для даного прикладу для певних числових значеннях параметрів моделі наведений на рис. 2.8.

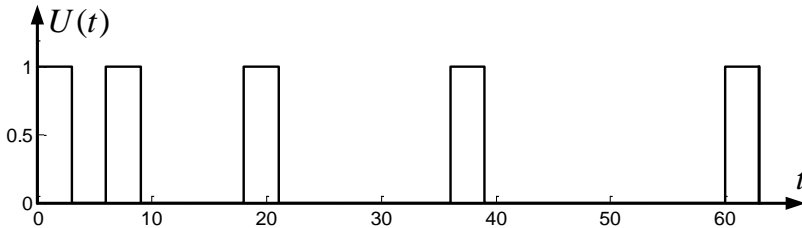


Рис. 2.8. Графік реалізації ЧІМ сигналу

Результати досліджень імпульсних і модульованих імпульсних сигналів розглянуті, наприклад, в [4, 23, 80].

2.2. Сигнали і ортогональні базиси

Розглянемо відомі факти з теорії ортогональних сигналів і ортогональних базисів і проаналізуємо можливості їх використання для вимірювань.

Відомо [33], що два сигнали $u(t)$ і $v(t)$ називаються *ортогональними*, якщо їхній скалярний добуток, отже і взаємна енергія, дорівнюють нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt = 0.$$

Зображення гільбертового сигналу $u(t)$ виду [33]

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t), \quad t \in T \quad (2.10)$$

іменується *розкладом сигналу $u(t)$ за вибраним ортогональним базисом $\{\varphi_k(t)\}$* .

Ряд виду (2.10) також іменується *ортogonalним рядом сигналу* $\{u(t)\}$, де послідовність дійсних чисел $\{c_k\}$ є коефіцієнтами розкладу за вибраним базисом на часовому інтервалі ортогональності T .

Однією з основних ідей використання ряду (2.10) є застосування відомих систем функцій. Такими функціями є класичні ортогональні поліноми Лежандра, Чебишева, Лагерра, Уолша з неперервним часом, тригонометрична система функцій та інші [6, 33, 50, 60, 66, 105]. Ортогональні базиси з дискретним аргументом – це поліноми Чебишева, Кравчука, Шарльє, Лагерра, функції Уолша з дискретним аргументом, які знайшли широке використання у цифровому опрацюванні даних вимірювань з використанням засобів обчислювальної техніки [2, 30, 36, 49, 50, 57, 61, 83, 89, 95, 105].

Використання ортогональних сигналів і базисів дає можливість ефективно вирішувати широке коло задач вимірювання характеристик і параметрів сигналів і має наступні переваги.

- Принципово зменшується об'єм і число операцій з визначення послідовності дійсних чисел $\{c_k\}$, тому що немає потреби вимірювати характеристики сигналу як функції часу.
- Використання відомого ортогонального базису $\{\varphi_k(t)\}$ дає можливість визначати збіжність ряду (2.10) із заданими показниками точності.
- Використання зображення (2.10) є по суті алгоритмом імітаційного (математичного і комп'ютерного) моделювання реалізації різних видів сигналу, включаючи тестові з заданими показниками точності.
- Обґрунтування використання того чи іншого ортогонального базису в задачах дослідження вимірювальних сигналів базується на результатах вимірювання їх характеристик.

Відомо, що ряд (2.10) іменується *узагальненим рядом Фур'є*, при цьому коефіцієнти такого ряду визначаються виразом

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_k(t) dt = (s, \varphi_k), \quad (2.11)$$

як скалярний добуток сигналу $s(t)$ з однією з функцій ортогонального базису $\{\varphi_k(t)\}$.

За умови вибору конкретного ортогонального базису ряд (2.10) іменуються наступним чином: для ортогонального базису Чебишева – ряд Фур'є – Чебишева; для ортогонального базису Ерміта – ряд Фур'є – Ерміта.

Розглянемо два характерних приклади ортогональних базисів, які знайшли широке застосування в теорії і практиці вимірювань для дослідження параметрів і характеристик інформаційних сигналів.

Приклад 1. Система тригонометричних функцій із кратними частотами, доповнена сталим у часі виразом φ_0 , виду:

$$\varphi_0(t) = 1 / \sqrt{T} ;$$

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \sin 2\pi t / T ;$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi t / T ;$$

.....

$$\varphi_{2k-1}(t) = \sqrt{2/T} \sin 2\pi kt / T ;$$

$$\varphi_{2k}(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi kt / T, \dots$$

.....

утворює ортонормований базис на часовому інтервалі $[-T/2, T/2]$.

Графіки функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ зображені на рис. 2.9. Можна показати, що скалярний добуток будь-яких двох функцій такої системи дорівнює нулю, а енергія і, відповідно, норма кожної з них дорівнює одиниці.

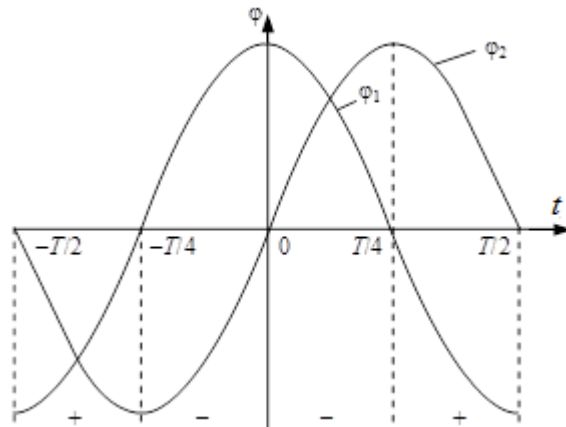


Рис. 2.9. Графіки тригонометричних функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$

Приклад 2. У відповідності до теореми відліків [23] для гільбертових сигналів з обмеженим спектром використовується ортогональний базис, який є єдиним і унікальним в класі ортогональних базисів.

Розглянемо особливості такого ортогонального базису. Виділимо клас сигналів, спектри яких відмінні від нуля лише в межах скінченного інтервалу частот. Приклад таких сигналів – радіоімпульс із лінійною частотною модуляцією.

Нехай D – скінченний частотний інтервал, у якому спектр $s(f)$ деякого сигналу $u(t)$ не дорівнює нулю, тобто $s(f) \neq 0$, якщо $f \in D$; $s(f) = 0$, якщо

$f \notin D$. У загальному вигляді модель сигналу з обмеженим спектром визначається формулою оберненого перетворення Фур'є: $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_D s(f) e^{i2\pi ft} df$.

Графік такого сигналу $u(t)$ і його спектра $s(f)$ наведено на рис. 2.10 а,б.

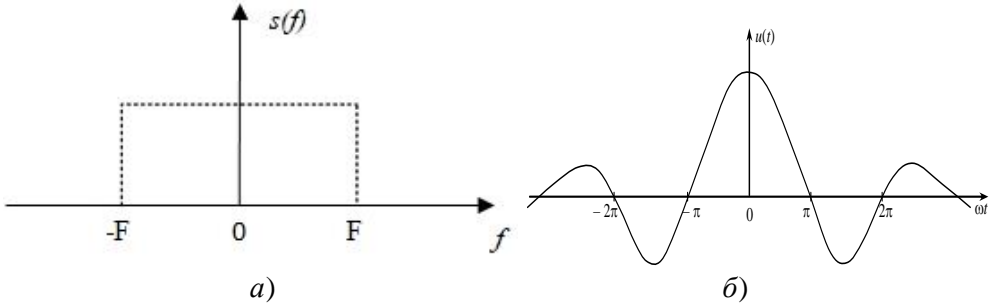


Рис. 2.10. Графіки спектру $s(f)$ (а) ідеального низькочастотного сигналу $u(t)$ (б)

Залежно від вибору інтервалу D і функції $s(f)$ можна отримати різноманітні сигнали з обмеженим спектром. Розглянемо коливання, спектральна щільність якого є сталою і набуває дійсних значень в межах частотного інтервалу, обмеженого деякою верхньою частотою F , і відповідно $\Omega = 2\pi F$. Поза цим інтервалом спектральна щільність перетворюється на нуль. Такий сигнал $u(t)$ можна виразити ортогональним рядом [2, 23, 54]

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u\left(\frac{k}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)}{2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \frac{\sin \Omega(t - k\Delta t)}{\Omega(t - k\Delta t)}, t \in T. \quad (2.12)$$

Цей ряд побудований з використанням системи ортогональних функцій

$$\left\{ \frac{\sin kt}{kt}, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \right\},$$

для якої має місце

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega(t - k\Delta t)}{\Omega(t - k\Delta t)} \cdot \frac{\sin \Omega(t - m\Delta t)}{\Omega(t - m\Delta t)} dt = \begin{cases} \Delta t, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Збіжність ряду (2.12) визначена в середньоквадратичному, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(u(t) - \sum_{k=-n}^n u(k\Delta t) \frac{\sin \Omega(t - k\Delta t)}{\Omega(t - k\Delta t)} \right)^2 \right\} = 0. \quad (2.13)$$

Ряд (2.12) є основою відомої теореми відліків, суть якої полягає в передачі по системах зв'язку сигналу $u(t)$ не у вигляді коефіцієнтів $\{c_k\}$, визначених згідно (2.11), а безпосередньо відліків самого сигналу $u(t)$, взятих на дискретній множині часового інтервалу $-k\Delta t, -(k-1)\Delta t, \dots, -\Delta t, 0, \Delta t, \dots, k\Delta t$.

Саме властивість використання відліків сигналу $u(t)$ на рівномірній часовій ґратці з інтервалом $\Delta t = 1/2F_B$ і обумовлює ортогональність базису (2.12).

Використання виразу (2.13) відіграє важливу роль для завдань вимірювань, а саме, при оцінюванні значень показників точності апроксимації досліджуваного сигналу $u(t)$ ортогональним рядом (2.12).

Цікаво, що ряд (2.12) у вітчизняних та закордонних публікаціях іменується по-різному. З метою узгодження можна запропонувати інтернаціональну назву ряду (2.12) на основі історії його обґрунтування і використання. Пропонується назвати ряд (2.12) рядом Уїттекера-Котельникова-Шеннона. Відомо, що відомий математик Уїттекер (США, 1915р.) вперше довів теорему відліків для функції з обмеженим спектром, радянський вчений у галузі радіотехніки Котельников (СРСР, 1933 р.) запропонував передавати по лініях зв'язку тільки відліки часового сигналу $u(t)$ згідно (2.12), а відомий вчений в галузі теорії інформації Шеннон (США, 1946р.) використав ряд (2.12) для вирішення проблем передавання інформації по різних каналах. Слід також зазначити, що в ряді публікацій, наприклад [23] відмічається, що вперше теорема відліків була доведена видатним французьким математиком О. Коші (Франція, 1789-1857).

2.3. Моделі випадкових сигналів

Розглянемо моделі сигналів, які описуються випадковими процесами. При дослідженні випадкового процесу, який розглядається як послідовність випадкових величин, визначення і характеристики випадкової величини є фундаментальними.

Випадковий процес $\{\xi(\omega, t), t \in T\}$ є функцією двох змінних, де t інтерпретується як час. Для кожного фіксованого $t=t_0$ маємо випадкову величину $\xi(\omega, t_0)$. Випадковий процес $\xi(\omega, t)$ можна задати трьома рівнозначними способами: як упорядковану відносно змінного t множину випадкових величин; як множину числових функцій часу – реалізацій процесу, кожна з яких розглядається як одна елементарна подія з відповідним фіксованим $\omega \in \Omega$ і як вимірну функцію на добутку просторів $\Omega \times T$.

В залежності від множини параметра $t \in T$ випадковий процес має певні особливості і відповідні назви:

якщо $t \in T$ заданий дискретно й утворює числову послідовність $\{t_j, j=0,1,2,\dots\}$ зі скінченним або зліченим числом її елементів, то випадковий процес $\{\xi(\omega, t_j), j = 0,1,2, \dots\}$ називається *часовим рядом* або *випадковою послідовністю*;

якщо t неперервний параметр, тобто T має потужність континууму, то тоді процес $\xi(\omega, t) = \xi(t)$ є випадковим з неперервним часом.

У більшості випадків можна виділити три види впливу випадкових факторів на формування і динаміку зміни в часі реального сигналу:

динаміка сигналу підпорядковується точним закономірностям однозначно визначеними за початковими умовами, які є випадковими, тобто ці умови не зберігаються під час повторної реалізації сигналу; до прикладу такий випадок має місце для гармонійного сигналу з початковою випадковою фазою, реалізація якої формується тільки в початковий момент часу спостереження, тобто за $t = 0$;

динаміка сигналу на всьому заданому інтервалі часу T є випадковою, наприклад напруга теплового шуму на виході підсилювача, вихідна напруга генератора шуму;

динаміка сигналу обумовлена основною не випадковою закономірністю, яка спотворюється випадковим збуренням, діючим протягом усього часу спостереження сигналу, наприклад приймання радіолокаційного сигналу на фоні завад, знаходження корисного сигналу на фоні ревербераційної завади.

Випадковий процес – це складний математичний об'єкт з різноманітними властивостями й характеристиками. Умовну класифікацію випадкових процесів можна провести, наприклад базуючись на таких ознаках:

видах законів розподілу ймовірностей: гауссовий або пуассоновий процеси;

властивостях значень процесів: процеси з незалежними приростами, незалежними значеннями, неперервні або дискретні, цифрові;

властивостях характеристик процесів: стаціонарні, процеси з дробово-раціональними спектральними щільностями, періодично корельовані;

видах зображень (інтегральних, диференціальних) процесів: лінійні, гармонійні та авторегресії.

Для вирішення практичних завдань аналізу випадкових сигналів найчастіше використовуються стаціонарні та ергодичні процеси.

Стаціонарні випадкові процеси використовуються в якості моделей стохастичних сигналів, статистичні характеристики яких мають певну стабільність в часі. Серед них виділяють процеси в широкому й вузькому сенсі [3, 23, 58, 85].

Випадковий процес $\{\xi(\omega, t), t \in R\}$ для якого

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\} = a(t) \equiv a$$

і автокореляційна функція

$$\mathbf{M}\{[\xi(\omega, t_1) - a][\xi(\omega, t_2) - a]\} = R(t_1, t_2) = R(t, t + \tau) \equiv R(t_2 - t_1) = R(\tau)$$

називається *стаціонарним в широкому сенсі*.

Випадковий процес $\{\xi(\omega, t), t \in R\}$, для якого послідовність скінченновимірних функцій розподілу задовольняє умову

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau), j = \overline{1, n}$$

називається *стаціонарним у вузькому сенсі*.

З використанням результатів дослідження випадкових процесів, які наведені в значній кількості робіт, в тому числі в [3, 5, 23, 30, 49, 50, 54, 58-62, 85, 87, 97, 113], запропоновано метод побудови зображення випадкових процесів, який дає можливість створювати часові та спектральні зображення стаціонарних і нестаціонарних, гауссових і негауссових випадкових процесів. Ідея зображення довільної випадкової функції через систему інших випадкових функцій з добре вивченими і порівняно простими в ймовірнісному сенсі властивостями широко використовується в теорії випадкових процесів.

На основі використання відомих методів канонічного розкладу, формуючих фільтрів, оновлюючого і породжуючого процесів, стохастичних інтегральних зображень запропонований метод використовує зображення випадкового процесу у вигляді стохастичного інтегралу

$$\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) d\eta(\omega, x), t \in T, \quad (2.14)$$

де не випадкова функція $\varphi(x, t)$ і випадкова функція $\eta(\omega, x)$ задовольняють конкретним умовам для конкретних процесів.

Часові зображення випадкового процесу $\xi(\omega, t)$ можна будувати на підставі того, що функція $\varphi(x, t) = \varphi(\tau, t)$ має фізичну інтерпретацію як імпульсна перехідна функція деякої лінійної системи, у загальному випадку зі змінними у часі параметрами. Відомі і інші фізичні інтерпретації зображення (2.14). Наприклад, вираз (2.14) має інтерпретацію як суперпозиція (накладання) імпульсів, які виникають у момент τ і описуються за змінного часу t імпульсною формою $\varphi(\tau, t)$.

Якщо у виразі (2.14) замість $\varphi(x, t)$ і $\eta(\omega, x)$ використати функцію $e^{i2\pi ft}$ і $z(\omega, f)$, де змінна f має фізичну інтерпретацію як частота, то отримаємо спектральне зображення випадкового процесу, для якого ядро інтегрального зображення на відміну від часового є одним і тим самим.

Розглянемо приклади конструктивних випадкових процесів, які використовуються для створення сучасних інформаційних технологій вимірювання характеристик і параметрів сигналів стохастичної фізичної природи.

Приклад 1. Лінійні випадкові процеси є моделями вимірювальних сигналів з стохастичною природою зміни їх значень у часі.

Лінійний випадковий процес (ЛВП). *Лінійним* називається випадковий процес, який описується стохастичним інтегралом (2.14) з відповідною конкретизацією, а саме [58]

$$\xi(\omega, t) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\omega, \tau), t \in T, \quad (2.15)$$

де $\varphi(\tau, t)$ – не випадкова функція двох змінних, інтегрована з квадратом по τ для кожного $t \in T$, а $\{\eta(\omega, t), \eta(0) = 0, t \in [0, \infty)\}$ – випадковий процес стохастично неперервний з незалежними або некорельованими приростами. У множині лінійних випадкових процесів за аналогією зі стаціонарними випадковими процесами виділяють лінійні у широкому і вузькому сенсі випадкові процеси.

Лінійні випадкові процеси виду (2.15) утворюють:

клас лінійних у вузькому сенсі процесів, коли $\eta(\omega, \tau)$ – неоднорідний (однорідний) процес з незалежними приростами і безмежно подільними законами розподілу;

клас лінійних у широкому сенсі процесів, коли $\eta(\omega, \tau)$ – процес з некорельованими (ортогональними) приростами;

клас лінійних стаціонарних у вузькому сенсі, коли $\varphi(\tau, t) \equiv \varphi(t - \tau)$ і $\eta(\omega, \tau)$ – однорідний процес з незалежними приростами;

клас лінійних стаціонарних у широкому сенсі процесів, коли $\varphi(\tau, t) \equiv \varphi(t - \tau)$ і $\eta(\omega, \tau)$ – процес з некорельованими (ортогональними) приростами.

Лінійний випадковий процес виду (2.15) має наступну фізичну інтерпретацію. На вхід лінійної системи (рис. 2.11) діє випадковий процес типу білого шуму $\zeta(\omega, t)$, як узагальнена похідна породжуючого випадкового процесу $\eta(\omega, t)$. Відгуком цієї системи є лінійний випадковий процес $\xi(\omega, t)$ для якого отримана n -вимірна послідовність характеристичних функцій [58].

Це дає змогу проводити дослідження лінійних випадкових процесів у повному імовірнісному обсязі, включаючи кореляційну або енергетичну теорію дослідження як частковий випадок.

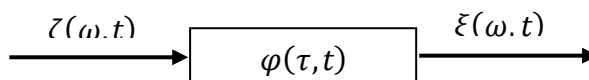


Рис. 2.11. Схематичне зображення формування лінійного випадкового процесу

Використання лінійних випадкових процесів в дослідженнях вимірювальних сигналів дає можливість:

створення широкого кола моделей у часовій області сигналів у завданнях вимірювань, контролю, діагностики та прогнозу;

лінійні перетворення лінійних випадкових процесів залишають його в класі лінійних випадкових процесів;

аналізувати нелінійні перетворення лінійних випадкових процесів в ланках і модулях систем і засобів вимірювань;

обґрунтовувати алгоритмічно-програмне забезпечення опрацювання даних вимірювань, як аналоговими так і цифровими системами вимірювань;

визначати всі числові характеристики лінійних випадкових процесів під час оцінювання характеристик вимірювальних сигналів;

узагальнити відомі методи досліджень випадкових процесів, а саме методи канонічного розкладу формуючих фільтрів, оновлюючого та породжуючого процесів.

Таким чином, у класі лінійних процесів можна виділити лінійні у вузькому та широкому сенсі, стаціонарні, гауссові, періодичні і періодично корельовані процеси.

Випадковий процес $\eta(\omega, t)$ завжди дійсний, а лінійний процес $\xi(\omega, t)$ буде тоді комплекснозначним, коли таким буде його ядро інтегрального зображення (2.15), тобто функція

$$\varphi(\tau, t) = \operatorname{Re} \varphi(\tau, t) + i \operatorname{Im} \varphi(\tau, t).$$

Зазначимо, що теорія випадкових процесів із незалежними приростами більш досліджена у порівнянні з іншими класами випадкових процесів на основі використання фундаментальних результатів, які сприяли її розвитку. Це дослідження Л.Башел'є (L.Bachelier, 1900), Н.Вінера (N.Wiener, 1923) щодо броунівського руху, Б.де Фінетті (B.de Finetti, 1929) і А.Н.Колмогорова (1932) однорідних випадкових процесів з незалежними приростами, які мають кінцеву дисперсію, і, нарешті, результати аналізу П.Леві (P. Levy, 1934) так званих «адитивних випадкових функцій».

Результати досліджень випадкових процесів з незалежними приростами тісно пов'язані з класичними результатами аналізу сум незалежних випадкових величин і, таким чином, з теорією безмежно подільних законів розподілу, в тому числі результатів вирішення центральної граничної теореми суми незалежних випадкових величин.

Для обґрунтування спектрального зображення випадкового процесу в основі положений гармонізований випадковий процес [3, 23, 85]. Це дало змогу поширити методи гармонійного аналізу числових функцій на клас випадкових процесів, включаючи й нестационарні.

Приклад 2. *Гармонізованим* випадковим процесом називається гільбертів процес $\{\xi(\omega, t), T \in t\}$, який допускає зображення

$$\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ift} dz(\omega, f), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T, \quad (2.16)$$

де f і t – дійсні змінні, а $z(\omega, f)$ – комплекснозначна випадкова функція, кореляційна функція якої

$$F(f_1, f_2) = \mathbf{M}\{z(\omega, f_1)z^*(\omega, f_2)\} \quad (2.17)$$

має обмежену варіацію на площині $f_1 \times f_2$, а $z^*(\omega, f_2)$ – комплексноспряжена випадкова функція.

Кореляційна функція гармонізованого процесу визначається виразом

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f_1 t_1 - f_2 t_2)} d_{f_1} d_{f_2} F(f_1, f_2), \quad t_1, t_2 \in T. \quad (2.18)$$

Гармонізовані випадкові процеси статистично еквівалентні лінійним процесам і в ряді випадків являють собою іншу форму запису лінійного випадкового процесу, яка розкриває його гармонійну структуру. Але не кожний лінійний процес є гармонізованим та не кожний гармонізований процес є лінійним, тобто ці два класи процесів перетинаються, але не збігаються.

У класі гармонізованих випадкових процесів можна виділити гауссові, стаціонарні в широкому сенсі, і періодично корельовані.

Сформулюємо ряд тверджень, що відносяться до лінійних та гармонізованих випадкових процесів [3, 23, 58-60, 85]:

1. Для лінійного у вузькому сенсі випадкового процесу $\{\xi(\omega, t)\}$ з породжуючим однорідним процесом із незалежними приростами $\eta(\omega, t)$ одержаний повний в ймовірнісному сенсі опис на основі визначеної послідовності зкінченновимірних характеристичних функцій.

2. Лінійний випадковий процес є стаціонарним у вузькому сенсі якщо функція $\varphi(\tau, t)$ залежить тільки від різниці аргументів $t - \tau$, а породжуючим випадковим процесом $\eta(\omega, t)$ є однорідний процес з незалежними приростами.

3. Лінійний випадковий процес є стаціонарним в широкому сенсі, якщо $\varphi(\tau, t) \equiv \varphi(t - \tau)$, а породжуючий $\eta(\omega, t)$ є процесом з некорельованими (ортогональними) приростами і задовольняє умові

$$\mathbf{M}\{\eta^2(\omega, \tau)\} = \sigma^2 d\tau, \quad (2.19)$$

де $\sigma \geq 0$ – числова величина.

4. Гармонізований випадковий процес є стаціонарним в широкому сенсі, якщо породжуюча випадкова функція $z(\omega, f)$ є функцією з некорельованими (ортогональними) приростами, для якої

$$\mathbf{M}\{z(\omega, f)\} = 0, F(f_1, f_2) = F(\min(f_1, f_2); f_1 f_2 \in [0, \infty]) \quad (2.20)$$

5. Лінійні й гармонізовані випадкові процеси гауссові, якщо породжуючий їх випадковий процес $\eta(\omega, \tau)$ і випадкова функція $z(\omega, f)$ є гауссовими.

6. Для гауссових випадкових процесів має місце: а) множини лінійних нестационарних (стаціонарних) у вузькому і широкому сенсах повністю співпадають; б) множина гармонізуємих нестационарних (стаціонарних) у широкому сенсі є множиною відповідних процесів у вузькому сенсі.

Приклад 3. Одним з нестационарних випадкових процесів, який використовується в завданнях вимірювання є *періодично корельований випадковий процес* (ПКВП). Розглянемо його властивості і характеристики.

Гармонізований випадковий процес $\xi(\omega, t)$ називається *періодично корельованим з періодом T_0* , якщо його кореляційна функція $R(t_1, t_2)$ є неперервною і задовольняє умові

$$R(t_1, t_2) = R(t_1 + T_0, t_2 + T_0), \quad (2.21)$$

де $T_0 > 0$ – деяка фіксована числова величина.

Слід зазначити, що знання періоду T_0 є принциповим в дослідженні ПКВП. По суті знання T_0 є «ключем», який дає змогу розкрити структуру й властивості характеристик ПКВП.

Структура і характеристики ПКВП представлені в [3, 23, 95]. Тут лише наведемо ряд тверджень стосовно використання ПКВП, які мають вагоме значення для вимірювань характеристик циклічних або ритмічних стохастичних сигналів:

ПКВП є одним з найбільш досліджених в класі нестационарних випадкових процесів, тому обґрунтування його використання має як теоретичну, так і практичну базу;

практичне використання ПКВП в різних предметних областях науки і техніки пов'язано з тим, що в залежності від завдань вимірювань можна виділити інформаційно важливі стаціонарні компоненти, для опрацювання характеристик яких застосовується потужний алгоритмічно-програмний ресурс опрацювання даних вимірювань;

одним із основних завдань вимірювань, що виникають під час дослідження ПКВП, є оцінювання значення періоду T_0 з відповідно заданими значеннями його невизначеності.

Перейдемо до розгляду багатовимірних сигналів і полів.

2.4. Моделі багатовимірних сигналів та полів

Розглянуті вище моделі вимірювальних сигналів є функціями часу, тобто функціями одного аргументу і іменуються *одновимірними*. Функції двох аргументів іменуються *двовимірними*, а в загальному випадку для числа аргументів $n \geq 2$ називаються *багатовимірними*. Стисло розглянемо основні види моделей багатовимірних сигналів та полів, які є предметами вимірювання і широко використовуються у різних предметних областях.

Клас моделей багатовимірних сигналів і полів доцільно поділити на детерміновані і випадкові. Такий розподіл дає можливість врахувати специфіку і характерні особливості вимірювань значень і характеристик досліджуваних сигналів [3, 6, 14, 60, 87, 111-113]:

для детермінованих багатовимірних сигналів при вимірюваннях достатньо зафіксувати одну з їх реалізацій у просторі і часі на основі отриманих даних вимірювань визначається результат і функція невизначеності вимірювань з використанням фізичної міри досліджуваної ввеличини. У подальшому моделі таких сигналів будемо іменувати багатовимірними функціями, а для конкретних випадків вказувати число аргументів. Наприклад, тривимірна функція є детермінованою функцією трьох аргументів;

для випадкових багатовимірних сигналів, які є просторово-часовими полями, при вимірюваннях необхідно зафіксувати цілу низку їх реалізацій (ансамбль реалізацій), а для отримання відповідних результатів і характеристик невизначеності необхідно разом з використанням фізичних мір досліджуваних величин використати і ймовірнісну міру досліджуваної випадкової функції. У подальшому моделі випадкових сигналів будемо іменувати *просторово-часовими випадковими полями*.

Моделі детермінованих багатовимірних сигналів. Раніше відмічалось, що у зв'язку зі зростанням складності завдань вимірювань збільшується і різноманітність моделей досліджуваних сигналів, у першу чергу за рахунок просторових координат $x \in R$, $(x, y) = \rho \in R^2$ і $(x, y, z) = \mathbf{r} \in R^3$.

Прикладами моделей таких сигналів є багатовимірні функції виду:

$$\{u(x, t) \in R, x \in R, t \in T\} \text{ – двовимірна;}$$

$$\{u(\rho, t) \in R, \rho \in R^2, t \in T\} \text{ – тривимірна;}$$

$$\{u(\mathbf{r}, t) \in R, \mathbf{r} \in R^3, t \in T\} \text{ – чотиривимірна.}$$

Дослідження таких функцій породжує цілу низку завдань вимірювання їх характеристик. Так, наприклад, середнє значення функції $u(\mathbf{r}, t)$ за часом є функцією просторових координат і визначається формулою

$$\bar{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\mathbf{r}, t) dt, t \in T.$$

Середнє по просторовим координатам функції $u(\mathbf{r}, t)$ є функцією часу і визначається формулою

$$u(t) = \frac{1}{G} \int_G u(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, (x, y, z) = \mathbf{r} \in G \subseteq R^3.$$

На основі використання квадратичних операторів перетворення таких сигналів досліджуються їх енергетичні характеристики. Для визначення характеристик і параметрів багатовимірних детермінованих сигналів, які за фізичною природою є просторово-часовими сигнальними полями, використовуються методи функціонального аналізу і математичної фізики. Моделі багатовимірних детермінованих сигналів у практиці вимірювань відносяться до ідеалізованих моделей, які формуються фундаментальними законами конкретної предметної області, наприклад теплофізики, гідродинаміки, теоретичної механіки та інших. Прикладами таких сигналів є просторово-часові електромагнітні, віброакустичні, теплові, гідроакустичні та інші.

Моделі просторово-часових випадкових полів. Такі моделі сигналів досліджуються методами теорії випадкових процесів і полів. Методами математичної статистики на основі практичного використання засобів і систем вимірювання визначаються статистичні оцінки їх характеристик. Розмірність, тобто число аргументів випадкової моделі сигналів у порівнянні з детермінованою збільшується на одиницю. Так, наприклад, модель детермінованого чотиривимірного сигналу описується функцією

$$\{u(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in R^3, t \in T\},$$

а модель випадкового такого ж сигнального поля описується просторо-часовим випадковим полем

$$\{\xi(\omega, \mathbf{r}, t), \omega \in \Omega, \mathbf{r} \in R^3, t \in T\}.$$

На практиці у більшості випадків вимірювань оцінювання просторово-часових характеристик досліджуваних як детермінованих, так і випадкових сигналів використовуються моделі, загальний вид яких в залежності від сукупності аргументів наведено в табл. 2.2.

В табл. 2.2 використанні такі позначення: ω – елементарна випадкова подія з простору подій Ω ; T – часовий інтервал спостереження, R – множина дійсних чисел.

З метою використання вказаних моделей в завданнях вимірювань за умов обмежених областей простору G і скінченних інтервалів часу T , застосовується наступна багатовимірна індикаторна функція

$$I(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in G \text{ і } t \in T; \\ 0, & \mathbf{r} \notin G \text{ або } t \notin T. \end{cases}$$

Таблиця 2.2

Аргументи Види функцій	$\omega \in \Omega$ $t \in T$	$\omega \in \Omega$ $x \in R$ $t \in T$	$\omega \in \Omega$ $(x, y) = \boldsymbol{\rho} \in R^2$ $t \in T$	$\omega \in \Omega$, $(x, y, z) = \mathbf{r} \in R^3$ $t \in T$
Детерміновані	число $\alpha \in R$, одновимірна функція $u(t) \in R$	двовимірна функція $u(x, t) \in R$	тривимірна функція $u(\boldsymbol{\rho}, t) \in R$	чотиривимірна функція $u(\mathbf{r}, t) \in R$
Випадкові	величина $\xi(\omega) \in R$, процес $\xi(\omega, t) \in R$, як двовимірна випадкова функція	тривимірне просторово-часове поле $\xi(\omega, x, t) \in R$	чотиривимірне просторово-часове поле $\xi(\omega; \boldsymbol{\rho}; t) \in R$	п'ятивимірне просторово-часове поле $\xi(\omega; \mathbf{r}; t) \in R$

Використання математичної моделі виду $\xi(\omega, \mathbf{r}, t) \cdot I(\mathbf{r}, t)$ дає можливість проводити дослідження з визначенням і просторово-часових характеристик сигналів за умови проведення вимірювань у різних місцях простору на скінченних інтервалах часу. Це забезпечує також проведення подальшого порівняльного аналізу результатів вимірювань з метою перевірки адекватності запропонованих моделей, прогнозу динаміки зміни основних характеристик ОД в просторі і часі та інше.

У випадку дослідження просторово-часових сигналів на основі використання випадкових моделей засобами вимірювання визначаються, як правило, статистичні оцінки характеристик сигнальних полів в рамках кореляційної (енергетичної) теорії. Тобто, для випадкового поля $\xi(\omega, \mathbf{r}, t)$ оцінюються:

математичне сподівання поля

$$a(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}\{\xi(\omega, \mathbf{r}, t)\};$$

дисперсія поля

$$\sigma^2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}\{\xi(\omega, \mathbf{r}, t)\} = \mathbf{M}\{[\xi(\omega, \mathbf{r}, t) - a(\mathbf{r}, t)]^2\};$$

автокореляційна функція поля

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mathbf{M}\{[\xi(\omega, \mathbf{r}_1, t_1) - a(\mathbf{r}_1, t_1)] \times [\xi(\omega, \mathbf{r}_2, t_2) - a(\mathbf{r}_2, t_2)]\};$$

структурна функція

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mathbf{M}[(\xi(\omega, \mathbf{r}_1, t_1) - \xi(\omega, \mathbf{r}_2, t_2))^2].$$

де $\mathbf{M}\{\dots\}$ і $\mathbf{D}\{\dots\}$ відповідно оператори визначення математичного сподівання і дисперсії випадкових функцій.

Визначені вище характеристики просторово-часових полів наведені в табл.2.3 з урахуванням їх структури і видів. На основі аналізу публікацій [54, 87], за результатами вимірювання характеристик багатовимірних детермінованих і просторово-часових випадкових полів можна зробити наступні висновки, які в стислій формі відображають специфіку і характерні особливості отримання результатів і характеристик невизначеності вимірювань у різних предметних областях:

Таблиця 2.3

Моделі і часові характеристики Види випадкових полів	модель	математичне сподівання	дисперсія	автокореляційна функція	структурна функція
Неоднорідне за просторовими аргументами і нестационарне в часі	$\xi(\omega; \mathbf{x}; t)$ $\xi(\omega; \mathbf{p}; t)$ $\xi(\omega; \mathbf{r}; t)$	$a(\mathbf{x}; t)$ $a(\mathbf{p}; t)$ $a(\mathbf{r}; t)$	$\sigma^2(\mathbf{x}; t)$ $\sigma^2(\mathbf{p}; t)$ $\sigma^2(\mathbf{r}; t)$	$R(x_1, x_2; t_1, t_2)$ $R(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; t_1, t_2)$ $R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2)$	$B(x_1, x_2; t_1, t_2)$ $B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; t_1, t_2)$ $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2)$
Неоднорідне стаціонарне	$\xi(\mathbf{r}; t)$	$a(\mathbf{r})$	$\sigma^2(\mathbf{r})$	$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_2 - t_1)$	$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_2 - t_1)$
Однорідне нестационарне	$\xi(\mathbf{r}; t)$	$a(\mathbf{r})$	$\sigma^2(\mathbf{r})$	$R(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; t_2, t_1)$	$B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; t_2, t_1)$
Однорідне і ізотропне, нестационарне	$\xi(\mathbf{r}; t)$	$a(t)$	$\sigma^2(t)$	$R(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 ; t_1, t_2)$	$B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 ; t_1, t_2)$
Однорідне і стаціонарне	$\xi(\mathbf{r}; t)$	a	σ^2	$R(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; t_2 - t_1)$	$B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; t_2 - t_1)$
Однорідне і ізотропне, стаціонарне	$\xi(\mathbf{r}; t)$	a	σ^2	$R(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 ; t_2 - t_1)$	$B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 ; t_2 - t_1)$

1. Використання сучасних інформаційних технологій вимірювання (табл. 2.4) дає змогу отримати результати вимірювання не тільки одновимірних, але й багатовимірних сигналів і полів на основі створення і обґрунтування моделей таких сигналів.

Таблиця 2.4

Види технологій	Види моделей вимірювання сигналів
Інформаційна технологія вимірювань ID (ITB-ID)	$\alpha, u(x, t), \xi(\omega), \xi(\omega, t); \xi(\omega; x; t)$
Інформаційна технологія вимірювань 2D (ITB-2D)	$u(\rho, t), \xi(\omega; \rho; t)$
Інформаційна технологія вимірювань 3D (ITB-3D)	$u(\mathbf{r}; t), \xi(\omega; \mathbf{r}; t)$

Необхідність отримання таких результатів вимірювання обумовлена темпами розвитку, новими завданнями розв'язання науково-технічних проблем у різних предметних областях.

2. Створення апаратного і інформаційного забезпечення використання завдань вимірювання пов'язано із забезпеченням єдності фізичних і ймовірнісних мір оцінювання характеристик багатовимірних сигналів і полів у відповідності з вимогами концепції.

3. Кожний конкретний випадок отримання результатів вимірювання значень і характеристик багатовимірних сигналів і полів є самостійними науково-технічними дослідженнями з використанням значного обсягу проведення і виконання теоретичних, моделюючих і експериментальних досліджень.

Наведені матеріали з області аналізу багатовимірних сигналів і полів відображають лише методологічні аспекти проведення їх досліджень. У кожному конкретному випадку практичне отримання результатів вимірювань, їх характеристик у просторі і часі потребує використання значних науково-технічних, фінансових і людських ресурсів.

3. МОДЕЛІ ТА МІРИ У ВИМІРЮВАННЯХ ВИПАДКОВИХ КУТОВИХ ВЕЛИЧИН

Кутові вимірювання з давніх часів широко використовуються у різних галузях діяльності людини. Вони стали ефективним інструментом пізнання світу, осмислення перебігу часу, успіхів астрономії і т.п. Використання методу перетворення різних фізичних величин у кути дало можливість досліджувати нові для науки явища і ефекти. Зокрема такий підхід використовувався під час дослідження атмосферних електричних зарядів (М.В. Ломоносов і Г.В. Ріхман); відкриття закону взаємодії точкових електричних зарядів (Ш. Кулон); визначення значення гравітаційної постійної Землі (Г.Г. Кевендіш) та ін. [49].

Фізичною мірою плоского кута є коло чи його частина, поділені на рівні інтервали. Такі міри реалізуються у вигляді лімбів чи кутомірних шкал (транспортир, квадрант, секстант тощо). Для фазових вимірювань міра фазових зсувів сигналів реалізується у вигляді двофазних генераторів або більш складних електронно-оптичних засобів. Менш поширеними в теорії і практиці кутових і фазових вимірювань є ймовірнісні моделей і міри. Розгляду саме цих питань присвячено даний розділ.

3.1. Моделі детермінованих і випадкових кутів у вимірювання

Моделі детермінованих кутів. Основні поняття в вимірюваннях кутів (кутометрії) сформовані ще в евклідовій геометрії і добре відомі. В першу чергу це поняття *плоского кута* – геометричної фігури, утвореної двома різними променями, що виходять із однієї точки, яка називається вершиною кута [25], а також пов'язаним з ним поняттями: центральні і суміжні кути, розгорнуті та прямі кути, суміжні, протилежні та прилеглі кути тощо.

Кути можна порівнювати. Два плоскі кути α та β називаються рівними (або конгруентними), якщо вони можуть бути суміщені таким чином, що співпадуть їх відповідні сторони і вершини. В системі аксіом Гільберта [64], розробленій ним для евклідової геометрії, відношення конгруентності позначається наступним чином: $\alpha \equiv \beta$.

На площині від довільного променя в певному напрямку можна відкласти єдиний кут рівний даному куту. Отже кут можна розглядати і як модель, і як міру повороту променя від його початкового положення до заданого. Залежно від напрямку повороту вводиться поняття додатніх і від'ємних кутів. Вважатимемо позитивними кути, що утворюються рухом променя в напрямку проти руху годинникової стрілки.

Для з'ясування, який з кутів α та β є більшим, необхідно сумістити в одній площині вершини і одну пару їх сторін. Якщо друга сторона одного кута, наприклад, кута β , буде розташована всередині кута α , кут α більший за кут β і позначають цей факт як $\alpha < \beta$ (рис. 3.1).

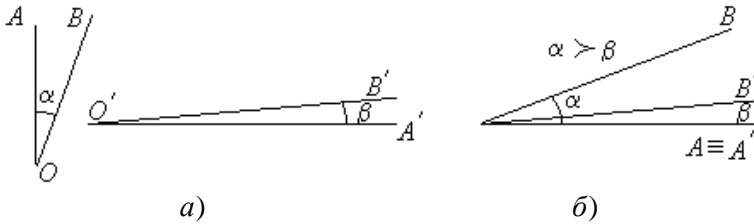


Рис. 3.1. Порівнювання кутів: а) до суміщення, б) після суміщення

В геометричній системі в основі якої лежить точково-векторна аксіоматика кут визначається по іншому [68]. В цій аксиоматиці під кутом розуміється певна метрична величина, яка пов'язана з двома векторами через операцію їх скалярного добутку. Відомо, що кожна пара векторів \vec{a} і \vec{b} визначає деякий кут φ - число, пов'язане з векторами наступною формулою

$$\cos \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) / |\vec{a}| |\vec{b}|, \quad (3.1)$$

де (\vec{a}, \vec{b}) – скалярний добуток векторів.

Поняття кута як плоскої фігури і як певної метрики застосовують в різних геометричних задачах, де кут визначають окремо спеціальним чином. Наприклад, під кутом між кривими що перетинаються розуміють кут між дотичними до цих кривих в точках перетину; кут між прямою і площиною визначають як кут між цією прямою та її прямокутною проекцією на цю площину; кут між схрещуваними прямими – це кут між напрямленнями цих прямих, тобто між прямими, що паралельні вихідним прямим і проведені через одну точку.

Більш наочними є моделі кутів на колі одиничного радіуса, або просто на одиничному колі (рис. 3.2).

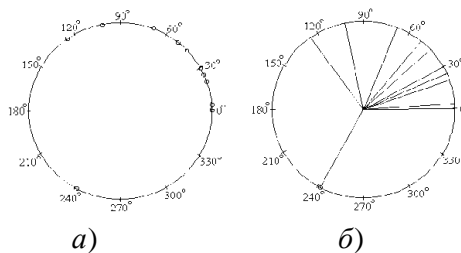


Рис. 3.2. Моделі плоского кута на одиничному колі у випадку його відображення точками (а) та векторами (б)

В цьому разі кути (або напрямки на площині) відтворюються точками на колі (рис. 3.2,*а*), або векторами, які закінчуються в цих точках, а починаються в центрі кола (рис. 3.2,*б*). Така модель відбиває основну особливість і відмінність кутових вимірювань порівняно з лінійними: для кутів існує математична операція «сума по модулю 2π ».

Моделі випадкових кутів. Новий етап розвитку кутометрії пов'язаний з дослідженням випадкових кутів. Під *статистичною кутометрією* розуміється розділ математичної статистики, який вивчає випадкові кути і інші випадкові величини, які передбачають необхідність їх дослідження на колі. Історичний огляд розвитку питання аналізу випадкових кутів наведено в роботі [56]. Перші дослідження в цьому напрямі стосувались рівномірно розподілених випадкових кутів. У 1734 році Д. Бернуллі (Bernoulli D.), розглядав задачу: чи можна пояснити близькість орбітальних площин відомих тоді шести планет сонячної системи випадковістю?

Відмінні від рівномірного розподілу на колі досліджуються лише починаючи з XX століття. Р. Мізес (Von Mises R.) дослідив розподіл, названий його ім'ям (1918), намотаний гауссівський розподіл вивчав Ф. Перрен (Perrin F.) (1928). У 20 столітті значний внесок в розвиток ідей статистичного аналізу випадкових кутів зробили Р.А. Фішер (Fisher R.A.), Е.Дж. Гамбел (Gumbel E.J.), Д. Дуранд (Durand D.), Дж. А. Грінвуд (Greenwood J.A.), Г. С. Ватсон (Watson G.S.), Е. Дж. Вільямс (Williams E.J.), С.Р. Рао (Rao C.R.), Д.Р. Рао (Rao J.S.), Е.С. Пірсон (Pearson E.S.), К. В. Мардіа (K.V. Mardia) та ін.

В статистичних кутових вимірюваннях в якості основної математичної моделі використовується модель випадкового кута $\Psi(\omega)$, визначеного на ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{A}, P) – вимірному ймовірнісному просторі з мірою, де Ω – простір елементарних подій $\omega \in \Omega$, \mathcal{A} – σ -алгебра підмножини Ω , P – ймовірнісна міра, задана на підмножинах \mathcal{A} . Простір (Ω, \mathcal{A}, P) породжує ймовірнісний простір значень випадкового кута $\Psi(\omega) - (X, \mathcal{B}, P_\Psi)$, де $X \subseteq R$ є множиною числової вісі R , \mathcal{B} – σ -алгебра підмножини з X , а P_Ψ – ймовірнісна міра (ймовірність випадкових подій $\Psi(\omega) \in \mathcal{B}$). Випадковий кут $\Psi(\omega)$ визначається як вимірна випадкова функція аргументу $\omega \in \Omega$ у просторі X .

У загальному випадку використовуються і інші більш складні ймовірнісні моделі, наприклад, двовимірний вектор випадкових кутів, процес випадкових кутів з дискретним часом та інші.

Означення 3.1. Дійсна випадкова величина

$$\psi(\omega) = \Psi(\omega) - [\Psi(\omega)/2\pi]^+ \cdot 2\pi, \quad \omega \in \Omega, \quad (3.2)$$

де $[\Psi(\omega)/2\pi]^+$ – ціла частина випадкового кута $\Psi(\omega) \in R$, називається випадковим кутом $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ якщо функція розподілу $\psi(\omega)$

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega: 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (3.3)$$

має наступні властивості:

1. $G(x')$ монотонно неспадна на $x' \in [0, 2\pi)$ і є неперервною справа;
2. $G(2\pi) = 1$ і є неперервною в точці $x' = 2\pi$;
3. $G(0) = 0$;
4. $G(x'_2) - G(x'_1) \geq 0$ якщо $x'_2 \geq x'_1$, $x'_1, x'_2 \in [0, 2\pi)$.

(3.4)

Аналіз виразу (3.5) показує на відмінність функції розподілу $G(x')$ від традиційної функції розподілу на числовій прямій R [3]: функція $G(x')$ задана на скінченному інтервалі аргументу $x' \in [0, 2\pi)$, $x \in [0, 2\pi)$, але на різних ділянках R . Тому функцію $G(x')$ називають *функцією розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$* .

На рис. 3.3 наведені в якості ілюстрації графіки: а) неперервної функції $G(x')$; б) дискретної функції $G_d(x')$.

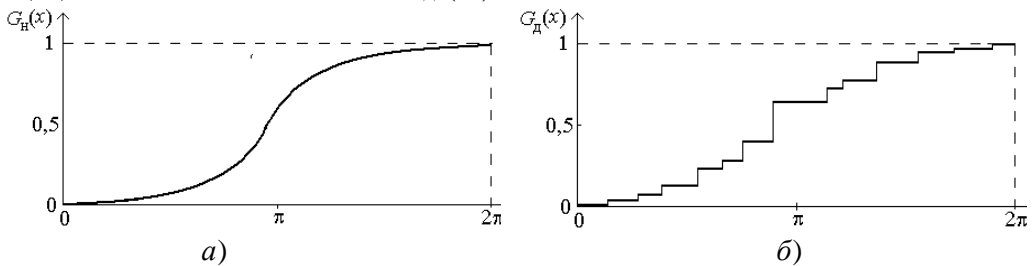


Рис. 3.3. Графіки функцій розподілу $G(x')$ (а) і $G_d(x')$ (б)

Ймовірнісний розгляд $\psi(\omega)$, в основному базується на використанні функції розподілу $G(x')$ на $[0, 2\pi)$.

В значній кількості практичних завдань ймовірнісний аналіз довільних випадкових кутів $\Psi(\omega) \in R$ зводиться до ймовірнісного аналізу його частини $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$.

Означення 3.2. Дійсна випадкова величина $\Psi(\omega) > 2\pi$

$$\Psi(\omega) = [\Psi(\omega)/2\pi] \cdot 2\pi + \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (3.5)$$

називається випадковим кутом $\Psi(\omega)$ на R , якщо $\psi(\omega)$ є випадковим кутом на $[0, 2\pi)$ з функцією розподілу $G(x')$ на $[0, 2\pi)$, визначеною за означенням 3.1, а інтегральна функція розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів $\Psi(\omega)$ на R для $\forall k \in Z$ визначається як

$$F(x) = G(x') + [x/2\pi]^+ + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

Для обґрунтування виразу (2.13) потрібне виконання двох умов:

$$P\{\omega \in \Omega : [\Psi(\omega)/2\pi] = k, \quad k \in Z\} = 1,$$

$$P\{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \in [0, 2\pi)\} = 1.$$

Інтегральна функція розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів $\Psi(\omega)$ на R для $\forall k \in Z$ має вид [24, 31],

$$F(x) = G(x') + [x/2\pi]^+ + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

Функція $F(x)$ має наступні властивості:

1. $F(x)$ монотонно неспадна.
2. $F(x)$ неперервна справа на $x \in R$.
3. $F(-\infty) = -\infty$; $F(\infty) = \infty$.
5. $F(x') = F(x') - F(0_-)$, $x' \in [0, 2\pi)$.
6. $F(x) - x/2\pi$ є періодичною функцією з періодом 2π .
7. $F(x + 2\pi) - F(x) \equiv 1$, $x \in R$.
8. Для $0 \leq x_2 - x_1 \leq 2\pi$

$$P\{\omega \in \Omega : x_1 < \Psi(\omega) \leq x_2\} = \begin{cases} 0, & x_2 \leq x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) & (x_1 < x_2 \leq x_1 + 2\pi); \\ 1, & x_2 > x_1 + 2\pi \end{cases}$$

9. Для різниці кутів у межах $2\pi - 0 < x_2 - x_1 \leq 2\pi$, маємо

$$\begin{cases} F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < x' \leq x_2\} \text{ для } [x_2/2\pi]^+ = [x_1/2\pi]^+; \\ (F(x'_2) - F(0)) + (F(x'_1) - F(2\pi)) = \\ = P\{(0 \leq x' \leq x'_2) + P(x'_1 \leq x' \leq 2\pi)\}, \text{ для } [x_2/2\pi]^+ = [x_1/2\pi]^+ + 1, \end{cases}$$

де $x'_1 = x_1 \pmod{2\pi}$, $x'_2 = x_2 \pmod{2\pi}$.

10. Стала C зазвичай дорівнює нулю, але в залежності від постановки задачі кутових вимірювань може набувати інші числові значення.

Із наведених властивостей функції $F(x)$, $x \in R$, витікає, що монотонно неспадна функція $F(x)$ має однакові прирости

$$F(x + 2\pi(k+1)) - F(x + 2\pi k) = 1, \quad \forall k \in Z,$$

що не суперечить властивостям нормованої ймовірнісної міри.

Таким чином на кожному скінченному інтервалу $\{2\pi k\} \cup [0, 2\pi)$, $k \in Z$, числової прямої R розподіл ймовірностей довільного випадкового кута $\Psi(\omega)$ виду (7.5) для конкретного k має розподіл ймовірностей $G(x')$ випадкового кута на $[0, 2\pi)$. Приклад графіка функції $F(x)$ для неперервного випадку наведено на рис. 3.4.

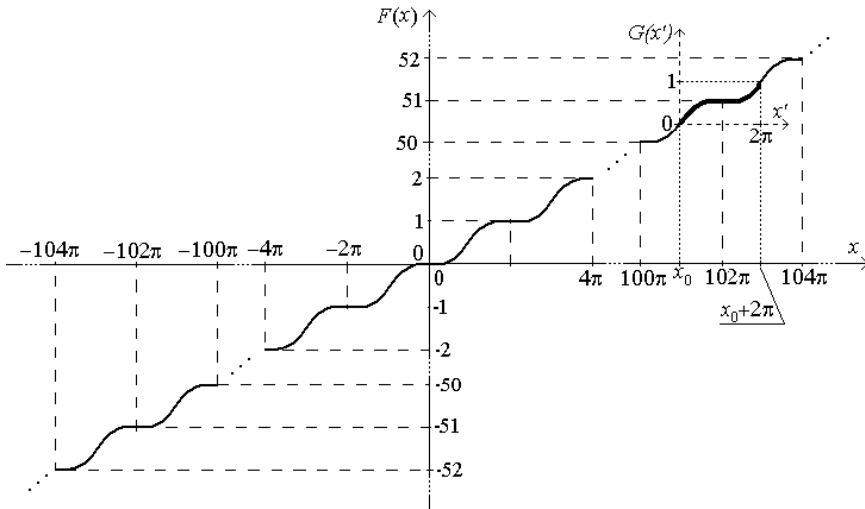


Рис. 3.4. Графік неперервної функції $F(x)$

Для значної кількості кутових вимірювань відсутності фіксована точка початку координат, тому за нульовий напрямок може бути прийняте довільне число x_0 з числової вісі R , а результати кутових вимірювань розглядають в інтервалі $[x_0, x_0 + 2\pi]$ або $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$.

Щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ випадкового кута $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$. Функція $p(x)$ для абсолютно неперервних законів розподілу на колі має властивості, що співпадають з властивостями функції $p(x)$

на прямій, так і відмінні властивості.

Для неперервних функцій $G(x')$ і $F(x)$ випадкових кутів маємо

$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2 + 2\pi k) - F(x_1 + 2\pi k) = \int_{x_1}^{x_2} p(y) dy, \quad x_{1,2} \in [0, 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функція $p(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ і має наступні властивості:

1. $p(x + 2\pi) = p(x)$, $p(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π .
2. $p(x) \geq 0$, $x \in [0, 2\pi)$.
3. $\int_0^{2\pi} p(x) dx = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} p(x) dx = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ймовірнісна модель випадкового кута на одиничному колі. Розглянемо випадковий кут $\Psi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega \in [0, 2\pi)\}$ та областю значень $\Theta \subset \mathbb{R}$. На комплексній площині задамо вектор

$$\eta(\omega) = \cos[\Psi(\omega)] + i \sin[\Psi(\omega)]. \quad (3.6)$$

Формула (4.6) встановлює однозначну відповідність між напрямками у просторі вектора $\eta(\omega)$ та частиною випадкового кута $\Psi(\omega)$:

$$\psi(\omega) = [\Psi(\omega)] \bmod 2\pi = \Psi(\omega) - [\Psi(\omega)/2\pi]^+ 2\pi, \quad (3.7)$$

Реалізацію випадкового вектора $\eta(\omega)$ відображатимемо на площині в декартовій системі координат xOy . Реалізація θ випадкового кута $\psi(\omega)$ співпадає в цій системі з напрямком відповідного вектора \mathbf{r}_q , отже $\arg(\mathbf{r}_q) = \theta$. Цей вектор починається в точці O і закінчується в точці з координатами $(x = \cos \theta; y = \sin \theta)$. Кут θ відраховується від осі Ox , у напрямку проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.5).

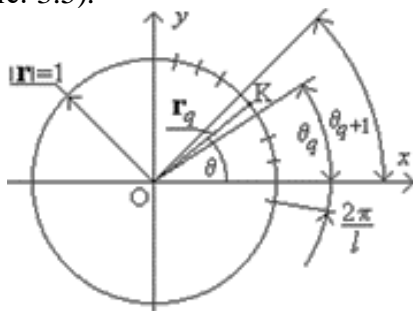


Рис. 3.5. Графічне зображення результатів кутових спостережень на колі

У разі зміни θ на 2π кінець вектора \mathbf{r} описує на площині xOy повне коло одиничного радіуса і повертається в ту саму точку кола. Коло з одиничним радіусом називають *нормованим* або *одиничним колом*.

Розділимо коло на скінченне число l рівних дуг точками кола $\pi(2q+1)/l$, почавши відлік q від осі Ox у напрямку проти ходу годинникової стрілки. Ці точки утворюють скінченне розбиття D одиничного кола. Наприклад, якщо $l = 4$ маємо $D = \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$.

З'єднаємо початок координат із зазначеними точками на колі векторами \mathbf{r} . Побудовані радіус-вектори утворюють із віссю Ox кути

$$\psi_q = \pi(2q+1)/l, \quad q = \overline{0, l-1}.$$

Виділимо елементарну подію ω_q , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних θ_q і таких θ_{q+1} , що $0 \leq \theta_{q+1} - \theta_q < 2\pi$, в інтервалі $[\theta_q, \theta_{q+1})$ знайдеться число θ , яке за модулем 2π є значенням $\psi(\omega)$. Це твердження можна записати

$$\omega_q = \{\psi(\omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}, \theta \in [\theta_q, \theta_{q+1})\}, \quad q = \overline{1, l-1}. \quad (3.8)$$

Отже, континууму значень напрямків \mathbf{r} в інтервалі $[0, 2\pi)$ поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій $\Omega = \{\omega_q, q = \overline{0, l-1}\}$, яку отримано розбиттям D одиничного кола на скінченне число l рівних інтервалів. Операції з усіма підмножинами Ω утворюють алгебру \mathcal{A} .

Для завершення побудови моделі випадкового кута залишилося задати ймовірності P_q подій ω_q з простору Ω . З урахуванням циклічної природи кутів визначимо ймовірності таким чином:

$$P_q = \begin{cases} P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi(\omega) < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\}, & [\theta_q/2\pi]^+ = [\theta_{q+1}/2\pi]^+; \\ P\{0 \leq \psi(\omega) < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} + P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi(\omega) < 2\pi\}, & \\ \left[\theta_q/2\pi\right]^+ = \left[\theta_{q+1}/2\pi\right]^+ + 1. & \end{cases} \quad (3.9)$$

Ймовірність події $B \subset \mathcal{A}$ у загальному вигляді визначається як

$$P(B) = \sum_{\{\omega_q \in B\}} P(\omega_q). \quad (3.10)$$

Для обчислення ймовірностей (3.9) необхідно ввести функцію, що породжує ймовірнісну міру. Використовуючи $F(\theta)$, визначимо (3.9) як

$$P(\theta_q \leq \Psi(\omega) < \theta_{q+1}) = \begin{cases} 0, & \text{для } \theta_{q+1} < \theta_q; \\ F(\theta_{q+1}) - F(\theta_q), & \text{для } \theta_q \leq \theta_{q+1} < \theta_q + 2\pi; \\ 1, & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q + 2\pi. \end{cases} \quad (3.11)$$

Функція розподілу $F(\theta)$ породжує міру випадкового кута. Для визначення $F(x)$ скористаємось її зв'язком з відповідною щільністю $p(\theta)$:

$$F(\theta_{q+1}) - F(\theta_q) = \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} p(x) dx, \quad (3.12)$$

де θ_q, θ_{q+1} – фіксовані кути, що відповідають розбиттю D .

Ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, де $P = P(B)$, $B \in \mathcal{A}$ – ймовірність події B , визначає ймовірнісну модель кутових спостережень під час статистичного вимірювального експерименту.

На множині Ω побудуємо стохастичну чи ймовірнісну міру $\varphi(\omega_q)$, яка дорівнює довжині дуг, що містяться між піввіссю Ox та векторами \mathbf{r}_q , $q = \overline{0, (l-1)}$. Отже, $\varphi(\omega_q) = 2\pi q/l$ – випадкова функція від інтервалу розбиття D . Множина подій з Ω відображається на числову вісь

$$x(\omega) = \{\varphi(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)}\}, \quad x(\omega) \in X \subseteq R.$$

Клас підмножин X дає можливість побудувати алгебру \mathcal{B} . Використовуючи вирази (3.11), (3.15), нескладно знайти ймовірності $P(A \in \mathcal{B})$ для визначеного закону розподілу ймовірності. Таким чином, отриманий ймовірнісний простір $\{X, \mathcal{B}, P_\varphi\}$, де $P_\varphi = \{P(A), A \in \mathcal{B}\}$, визначає область значень ймовірнісної моделі випадкового кута $\Psi(\omega)$.

3.2. Детерміновані та ймовірнісні міри кутових величин

Детерміновані міри кута на площині в межах $[0, 2\pi)$ і операції з кутами. Розглянемо варіанти визначення міри кута на площині. Коло належить до класу замкнених плоских кривих і в загальному виді описується в прямокутній декартовій системі координат рівнянням [10]

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad (3.13)$$

де x_0, y_0 – координати центру, r – радіус кола. На рис. 3.6,а маємо

$x_0 = y_0 = 0$, а $r = 1$. Для цих умов рівняння кола в тригонометричній формі має простий вигляд: $(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$. Використовуючи значення φ можна визначити координати кінцевої точки вектора \mathbf{p} в декартовій системі координат парою чисел $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Для кола мають місце наступні основні співвідношення: довжина кола дорівнює $C = 2\pi r$, довжина дуги, що відповідає центральному куту $\varphi - l = r\varphi$, довжина хорди, яка відповідає центральному куту $\varphi - a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r \sin(\varphi/2)$, де h – висота сегмента, площа кола - $S = \pi r^2$, площа сектора - $S_1 = 0,5lr = 0,5r^2\varphi$, площа сегмента - $S_2 = 0,5lr \pm S_\Delta$, де S_Δ - площа трикутника з вершиною в центрі кола і в кінцях радіуса, що обмежує відповідний сектор, знак “+” беруть, якщо $\varphi > \pi$, знак “-”, якщо $\varphi < \pi$.

Кожному вектору \mathbf{p} (рис. 3.6) можна поставити у взаємно однозначну відповідність дійсне число $\varphi \in [0, 2\pi)$, яке може формуватись як значення довжини дуги $l = \varphi$ (рис. 3.6,а), яка висікається на одиничному колі віссю Ox та вектором \mathbf{p} , або як значення площі сектора $S_1 = 0,5\varphi$ (рис. 3.6,б), обмеженого частиною вісі Ox , вектором \mathbf{p} та відповідною дугою одиничного кола.

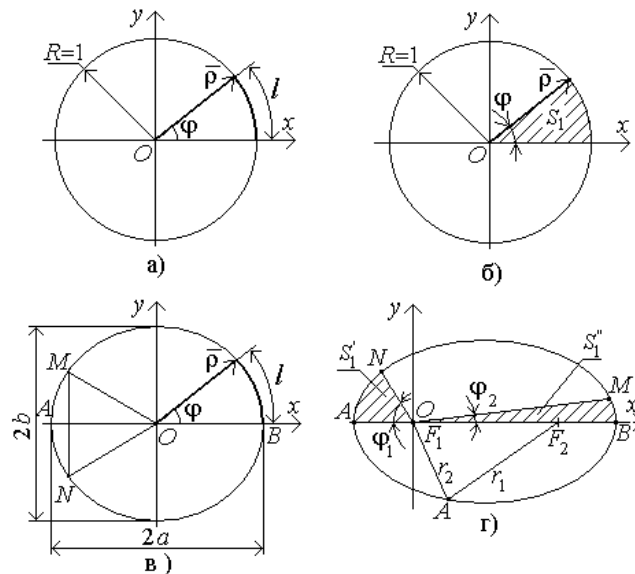


Рис. 3.6. Варіанти задання кута: а) довжиною дуги кола, б) площею сектора кола, в) довжиною дуги еліпса, г) площею сектора еліпса

Розглянуте вище задання кута на колі з рівномірним розбиттям не є єдиним. Можна розглядати як породжуючі інші міри випадкових кутів і інші замкнені плоскі криві, наприклад, еліпс (рис. 3.6, в). Таке формування випадкового кута може знайти застосування, наприклад, у геодезії під час проведення кутових спостережень на земній поверхні. Відомо [41], що математично форма Землі близька до поверхні еліпсоїда, утвореного обертанням еліпса навколо однієї з його осей. В геодезичних та картографічних роботах користуються еліпсоїдом Красовського (за прізвиськом відомого радянського вченого Ф.М Красовського (1878 - 1948), який у 1946 році керував дослідженнями з точного визначення розмірів земного еліпсоїда), для якого більша напіввісь становить $a=6378245$ м і відповідним співвідношенням стискання 1:298,3.

Еліпс [68], віднесений до осей симетрії, має рівняння

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad (3.14)$$

Сума квадратів складових x/a та y/b в (3.14) дорівнює одиниці, що дозволяє прийняти їх за синус і косинус деякого кута φ . Така заміна дозволяє застосовувати інше параметричне представлення еліпса

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (3.15)$$

Довжина дуги еліпса, що відповідає куту φ , обчислюється як [101]

$$l = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = aE(\varepsilon, \varphi), \quad (3.16)$$

де $\varepsilon = a^{-1}\sqrt{a^2 - b^2}$ – числовий ексцентриситет еліпса, $E(\varepsilon, \varphi)$ – позначення еліптичного інтегралу 2-го роду.

Характерною властивістю еліпса є те, що сума відстаней r_1 та r_2 від довільної точки еліпса до точок F_1, F_2 – фокусів еліпса, дорівнює постійній величині – $2a$, тобто його більший напіввісь: $r_1 + r_2 = (a - ex) + (a + ex) = 2a$.

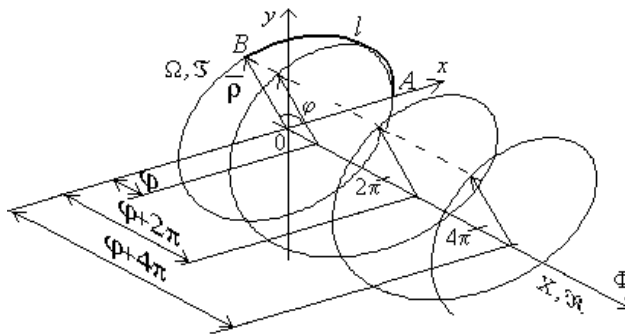
Площа еліпса (рис. 4.6, в) дорівнює $S = \pi ab$, площа сектора AOM – $S_1 = 0,5ab \arccos(x_M/a)$, а $S_2 = ab \arccos(x_M/a) - x_M y_M$ – це площа сегмента MAN , x_M, y_M – координати точки M [10].

Під час виконання орбітальних кутових спостережень космічних об'єктів може виявитись доцільним розташування центру системи координат в одному з фокусів еліпса (рис. 3.6, г) та формуванні значень випадкового кута пропорційно площі відповідних сегментів. Таке припущення ґрунтується на другому законі Кеплера руху планет [99]: під час незбуреного руху площа, що описується радіус-вектором матеріальної точки яка рухається, змінюється пропорційно часу, тобто радіус-вектор планети у рівні проміжки

часу описує рівні площі. На рис. 3.6,2 зображено еліптичну орбіту планети, у фокусі F_1 якого розміщено Сонце. Відрізки траєкторії BM та NA планета проходить за рівні проміжки часу, тому площі секторів AON та BOM рівні. Це приводить до нерівномірної за відрізками дуг міри випадкового кута. В дійсності, в результаті взаємного впливу планет Сонячної системи траєкторії планет – це складні просторові криві, які можна апроксимувати певним еліпсом лише за час одного – двох обертів.

Слід зазначити, що коло і еліпс не вичерпують всі можливі способи побудови випадкового кута. З цією метою можуть бути використані і інші замкнені плоскі криві другого порядку. Такий випадок може мати місце у випадку вимірювань в системах на основі безпілотних літальних апаратів, які рухаються по замкнених траєкторіях [5].

Детермінована міра кутів більших за 2π . В загальному випадку вимірювані кути можуть виходити за межі напівінтервалу $[0, 2\pi)$, тобто областю значень кута Φ може бути множина всіх дійсних чисел. В цьому випадку інтерпретувати значення таких кутів можна за допомогою гвинтової лінії [12]. Графічна інтерпретація кутів для цього випадку представлено на рис.4.7. Областю значень кута є множина X точок вісі ОФ. Відображення кут – число відбувається через гвинтову лінію, яка задається рівняннями



$$x = \cos \Phi, \quad y = \sin \Phi, \quad \Phi = 2\pi n + \varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рис. 3.7. Задання кутів на гвинтовій лінії та на колі

На рис. 3.7 напрямку вектора ρ в площині xOy відповідає дуга AB довжиною l . Цій дузі через гвинтову лінію ставиться у відповідність одне з чисел вісі ОФ виду $\varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Числове значення n задається початковими умовами або в інший спосіб, який визначається умовами фізичної реалізації експерименту кутів вимірювань.

Конструктивна форма представлення кута $\Phi > 2\pi$ у виді

$$\Phi = [\Phi/2\pi]^+ \cdot 2\pi + \varphi, \quad (3.17)$$

де $[\Phi]^+ \in Z$ – ціла (кількість повних обертів), а $\{\Phi\} = \varphi \in [0, 2\pi)$ – дробова частина кута φ , є основою формулою визначення довільного кута у кутових вимірюваннях. В практиці кутових вимірювань основну увагу приділяють куту $\varphi \in [0, 2\pi)$, але саме конструктивна форма (3.17) дає можливість досліджувати довільні кути. З цього виразу слідує, що

$$\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi}, \quad (3.18)$$

тобто дробова частина кута $\Phi > 2\pi$ визначається шляхом операції порівняння кута Φ по модулю 2π .

Ймовірнісна міра випадкових кутів породжується їх функціями розподілу. Ймовірнісній мірі випадкових величин і випадкових кутів притаманні властивості нормованості, скінченності та репрезентативності, що визначає їх практичну цінність для вимірювань. Разом з цим функції розподілу ймовірностей випадкових кутів мають певні особливості. Однією з характерних ознак кола як простору, на якому формуються множини кутів, є виконання на колі операції додавання за модулем 2π . Це обумовлює властивість періодичності законів щільності розподілу ймовірності випадкового кута, чим вони суттєво відрізняються від розподілів ймовірності випадкових величин.

Закони розподілів випадкових кутів. На рис. 3.8 зображено загальний вид щільності ймовірності $p(\theta)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$ випадкового кута.

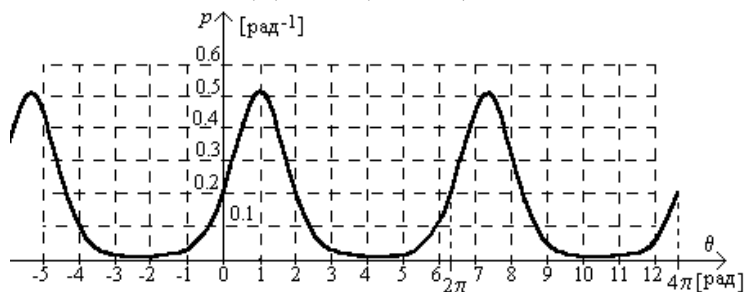


Рис. 3.8. Загальний вид щільності розподілу ймовірності випадкового кута

Графік побудований за умов апіорної невизначеності розташування інтервалу вимірювання $[\theta_n, \theta_n + 2\pi)$, де θ_n – початок інтервалу, і для якого виконується умова нормування:

$$\int_{\theta_n}^{\theta_n + 2\pi} p(\theta) d\theta = 1.$$

Щільність $p(\theta)$ на рис. 3.8 періодична з періодом 2π . В статистичній кутометрії такі розподіли називають одночастотними [56, 125]. Багаточастотні розподіли мають період менше за 2π в певне ціле число разів, тобто період $2\pi/j$, $j = 2, 3, \dots$. Далі розглянемо приклади найхарактерніших одночастотних розподілів ймовірності випадкових кутів.

Намотаний гауссовий розподіл. Цей розподіл належить до сім'ї намотаних розподілів ("намотаних" на одиничне коло), що утворюються нелінійним перетворенням випадкової величини $\xi(\omega)$ у випадковий кут $\psi(\omega)$ виду

$$\psi(\omega) = [K\xi(\omega)] \bmod 2\pi, \quad (3.19)$$

де K – масштабний коефіцієнт перетворення. Перетворення (3.19) приводить до трансформації законів розподілу на прямій в намотані закони розподілу ймовірності випадкових кутів. Якщо на прямій задано розподіл $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$, то намотаний на одиничне коло розподіл $F(x)$ визначатиме відповідний намотаний закон розподілу $F_{2\pi}(\theta)$ випадкового кута $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$. У загальному випадку маємо

$$F_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [F(\theta + 2\pi j) - F(2\pi j)], \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.20)$$

Якщо $\xi(\omega)$ має щільність розподілу ймовірності $p(x)$, то неперервний випадковий кут $\psi(\omega)$ також розподілений неперервно зі щільністю

$$p_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.21)$$

У загальному випадку функція $p_{2\pi}(\theta)$ несиметрична відносно середини інтервалу $[0, 2\pi)$, а на його кінцях набуває однакових значень: $p_v(0) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} p_v(\theta)$. У багатьох випадках значення j в сумі можна обмежити величиною $\pm 1, \dots, \pm 5$.

Щільність намотаного гауссового розподілу ймовірності задається виразом

$$p_{2\pi}(\theta/\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(\theta - \mu) \bmod 2\pi + 2\pi j]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.22)$$

де μ – математичне сподівання; σ – середньоквадратичне відхилення випадкової величини $\xi(\omega)$. Цей закон має важливу властивість: сума незалежних

кутів $\sum_{i=1}^n \theta_i$, кожний з яких має розподіл (3.22), теж має такий самий розподіл, але з іншими характеристиками.

Характеристична функція розподілу (3.22) має вигляд

$$f_{2\pi}(n) = f_n = \alpha_n = \exp(-n^2 \sigma^2 / 2), \beta_n = 0, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.23)$$

Для намотаного гауссового розподілу має місце центральна гранична теорема на колі: для незалежних випадкових кутів $\psi_1(\omega), \dots, \psi_n(\omega)$, які мають однакову функцію розподілу ймовірності $F(\theta)$, розподіл ймовірності нормованої суми кутів $\psi_\Sigma(\omega) = \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) \right] \bmod 2\pi$ у випадку $n \rightarrow \infty$ наближається до намотаного гауссієвого розподілу.

Приклади щільностей розподілу ймовірності намотаного гауссового розподілу для різних значень параметрів показано на рис. 3.9 а,б. З цих графіків видно, що намотаний гауссівський розподіл одновершинний і симетричний відносно значення $\theta = \mu \pmod{2\pi}$.

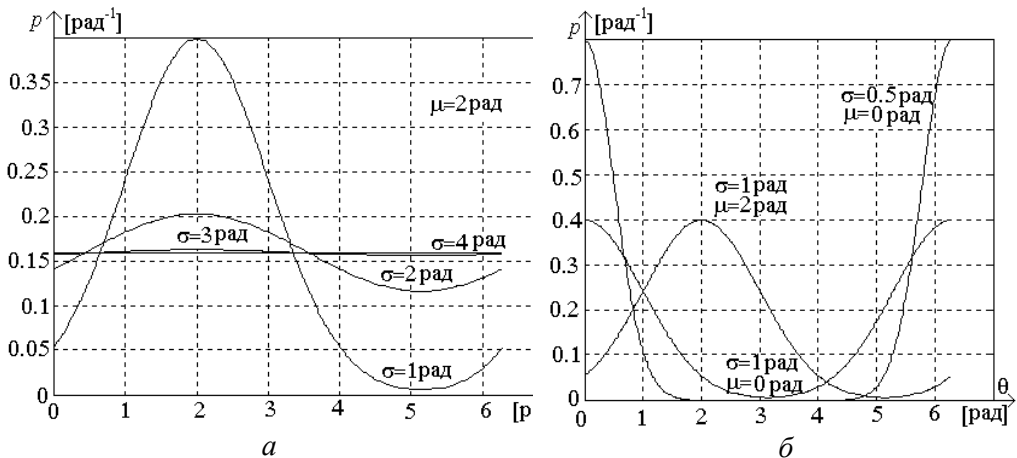


Рис. 3.9. Щільність намотаного гауссового розподілу ймовірностей випадкових кутів з різними параметрами

Якщо $\sigma \rightarrow \infty$ розподіл перетворюється на рівномірний зі щільністю $1/2\pi$, збільшення μ приводить до зміщення максимуму функції в бік більших значень кутів. На інтервалі $[0, 2\pi)$ розподіл (3.22) має дві точки перегину.

Розподіл Мізеса. Щільність розподілу ймовірності Мізеса для випадкового кута $\psi(\omega)$ визначається за формулою

$$p_M(\theta|\mu, k) = \exp\{k \cos(\theta - \mu)\} / 2\pi I_0(k), \quad |\mu| < \infty, \quad k > 0, \quad (3.24)$$

де $I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду і нульового порядку, μ – круговий середній напрямок випадкового кута; k – параметр концентрації випадкового кута в околі μ . Графіки функцій $p_M(\theta)$ для різних значень параметрів представлені на рис. 3.10. Зі збільшенням параметра k розподіл Мізеса концентрується навколо μ (якщо $k=2$ і $\mu=0,5\pi$, розподіл майже повністю зосереджений на дузі від 0 до 3 рад, а якщо $k \rightarrow 0$ – перетворюється на рівномірний).

Розподіл Мізеса одновершинний та симетричний відносно значення μ , яке є математичним сподіванням цього розподілу.

Характеристична функція розподілу Мізеса визначається

$$f_n = \alpha_n = I_n(k) / I_0(k). \quad (3.25)$$

Цей розподіл має наступну важливу властивість: найбільш правдоподібною оцінкою параметра μ є круговий середній напрямок.

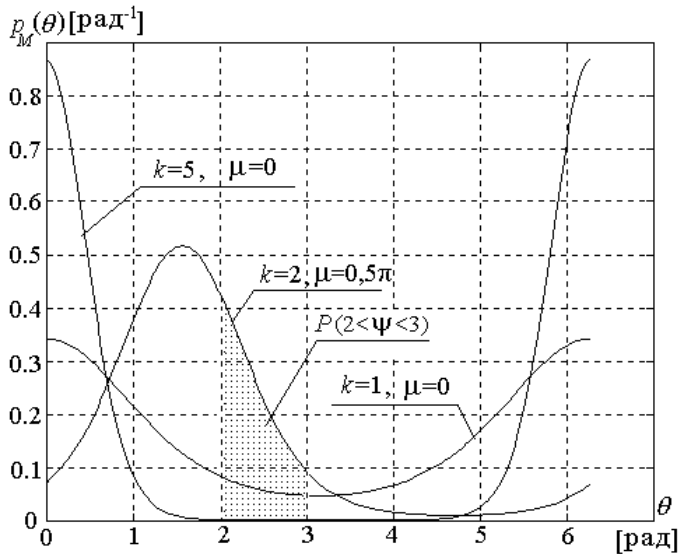


Рис. 3.10. Приклади графіків щільності розподілу ймовірності Мізеса

Відповідний вибір параметрів намотаного гауссового розподілу дозволяє задовільно апроксимувати його розподілом.

Інші типові розподіли на колі, наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1.

Назва	Щільність розподілу ймовірності $p(\theta)$	Характеристична функція f_n
Рівномірний	$1/2\pi$	$\frac{e^{2\pi ni} - 1}{2\pi ni} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$
Кардіоїдний	$(2\pi)^{-1} [1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)],$ $ \mu < \infty, \rho < 0,5$	-
Трикутний	$\frac{1}{8\pi} [4 - \pi^2 \rho + 2\pi \rho \pi - \theta],$ $\rho \leq 4/\pi^2$	$\alpha_{2n-1} = \frac{\rho}{(2n-1)^2}, \alpha_{2n} = 0, \beta_n = 0$
Намотаний Коші *)	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \cos 2\rho + \rho^2},$ $\rho = e^{-a} \in [0, 1]$	$\rho^{ a }$

*) Розподіл Коші на прямій має щільність розподілу ймовірності

$$p(x, a) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad x \in R, \quad a > 0.$$

Намотаний розподіл ймовірності Коші, як і гауссовий намотаний розподіл, має властивість безмежно подільного закону розподілу. Дискретний розподіл ймовірностей випадкових кутів з ймовірностями

$$P[\psi \equiv (v + 2\pi q/l) \bmod 2\pi] = P_q, \quad q = \overline{0, l-1}, \quad (3.26)$$

дістав назву *гратчастого* розподілу, а величина $2\pi/l$ – крока ґратки. Для ймовірностей (3.26) виконується умова нормування: $\sum_q P_q = 1$. Цей розподіл

можна вважати зосередженим у вершинах вписаного в одиничне коло правильного l -кутника. Якщо $P_q = l^{-1}$, то розподіл ймовірностей перетворюється у рівномірний дискретний.

Характеристична функція гратчастого розподілу, за $v = 0$, дорівнює

$$f_n = \sum P_q \exp(2\pi qni/l). \quad (3.27)$$

Для рівномірного дискретного розподілу маємо

$$f_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \bmod 2\pi \\ 0, & n \not\equiv 0 \bmod 2\pi \end{cases}. \quad (3.28)$$

3.3. Числові характеристики випадкових кутів

Характеристична функція розподілу ймовірностей випадкового кута $\Psi(\omega)$ визначається як послідовність значень [24, 31]

$$f_n = \mathbf{M}\{\exp(in\Psi(\omega))\} = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x) = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{inx} dF(x), \quad k, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.29)$$

Для неперервних та дискретних випадкових кутів з (3.29) маємо відповідно такі вирази

$$f_n = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta) p(\theta) d\theta, \quad f_n = \sum_{j=1}^m P_j \exp\left(in \frac{2\pi}{m}\right) \quad (3.30)$$

Характеристичну функцію випадкових кутів можна подати у вигляді ряду комплексних чисел

$$f_n = \alpha_n + i\beta_n = \rho_n \exp(i\mu_n), \quad (3.31)$$

$$\alpha_n = \mathbf{M} \cos(n\Psi) = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) dF(\theta), \quad \beta_n = \mathbf{M} \sin(n\Psi) = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) dF(\theta).$$

Оскільки для випадкового кута $\Psi(\omega)$ визначення (3.29) має сенс лише тоді, коли функція $\exp(in\Psi(\omega))$ є періодичною з періодом 2π , то n може бути тільки цілим числом: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тому у випадку розподіленого на колі випадкового кута характеристична функція – це послідовність тригонометричних моментів, обчислених відносно нульового напрямку.

Характеристична функція випадкових кутів має властивості:

1. Модуль характеристичної функції $|f_n| \leq 1$.
2. Для $n = 0$ маємо $f_0 = 1$.
3. Характеристична функція від'ємного аргументу дорівнює комплексно спряженій характеристичній функції, тобто $f_{-n} = f_n^*$ оскільки $\alpha_{-n} = \alpha_n$, $\beta_{-n} = -\beta_n$.
4. Характеристична функція суми незалежних випадкових кутів $\Psi_1(\omega), \dots, \Psi_m(\omega)$ дорівнює добутку їх характеристичних функцій

$$f_n = \prod_{j=1}^m f_n^{(j)}, \quad (3.53)$$

де $f_n^{(j)}$ – характеристична функція n -го порядку j -того кута.

5. Характеристична функція кута $[\Psi(\omega) + \nu] \bmod 2\pi$, де $\nu = \text{const}$ – довільний дійсний кут, дорівнює

$$Me^{in(\psi+v)} = e^{inv} f_n, \quad (3.32)$$

тобто зміна початку відліку не приводить до зміни тригонометричного моменту.

6. Щільність розподілу ймовірності випадкових кутів однозначно визначається її характеристичною функцією

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\theta}. \quad (3.33)$$

Формула (3.33) є розкладенням $p(\theta)$ в ряд Фур'є. Її використання в ряді випадків дозволяє суттєво спростити вирази для щільності розподілу ймовірності випадкових кутів.

Характеристичну функцію можна обчислити і відносно довільного початкового напрямку v . В цьому разі маємо

$$f_n(v) = Me^{in(\psi-v)} = \alpha_n(v) + i\beta_n(v) = \rho_n(v) e^{i\mu_n(v)}. \quad (3.34)$$

Використовуючи приведені вище властивості характеристичної функції випадкових кутів можна довести наступні співвідношення:

$$\rho_n(v) = \rho_n, \quad \mu_n(n) \equiv (\mu_n - nv) \bmod 2\pi. \quad (3.35)$$

Центральні тригонометричні моменти визначаються для $\rho_1 > 0$ відносно напрямку з полярним кутом μ_1 за виразами

$$\begin{aligned} f_n(\mu_1) &= f_n(0) e^{-in\mu_1(0)}, \\ a_n(\mu_1) &= \rho_n(0) \cos(\mu_n(0) - n\mu_1(0)) \\ b_n(\mu_1) &= \rho_n(0) \sin(\mu_n(0) - n\mu_1(0)). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для $n=1$ маємо $a_1(\mu_1) = \rho_1(0)$, $b_1(\mu_1) = 0$.

Кругове середнє відхилення $\delta(v)$ випадкового кута $\psi(\omega)$ відносно кута v визначається як математичне сподівання випадкового кута

$$\min\{\psi'(\omega), 2\pi - \psi'(\omega)\}, \quad (3.37)$$

де $\psi'(\omega) \equiv (\psi(\omega) - v) \bmod 2\pi$, тобто $\delta(v)$ як величина

$$\delta(v) = \int_0^\pi \theta dF(\theta+v) + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - \theta) dF(\theta+v). \quad (3.38)$$

Кругова дисперсія випадкового кута $\Psi(\omega)$ визначена як величина $v = 1 - \rho_1(0) = 1 - |f_1(0)|$. В загальному випадку вона розглядається як характеристика відхилення випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$ від фіксованого кута $\varphi' \in [0, 2\pi)$

$$v(\varphi') = \mathbf{M}\{1 - \cos(\psi(\omega) - \varphi')\} = 1 - \operatorname{Re} \mathbf{M}\{\exp i[\psi(\omega) - \varphi']\}. \quad (3.39)$$

У випадку $\rho_1(0) > 0$ маємо

$$v(\varphi') = 1 - \rho_1(0) \cos(\varphi' - \mu_1(0)) = 1 - \rho_1(0) + 2\rho_1(0) \left(\sin \frac{\varphi' - \mu_1(0)}{2} \right)^2. \quad (3.40)$$

Цей вираз набуває мінімального значення, коли $\varphi' = \mu_1(0)$. Тобто, кругова дисперсія випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$ приймає мінімальне значення, яке дорівнює величині $v(\alpha_1) = 1 - \rho_1(0)$ для $\varphi' = \mu_1(0)$, тобто коли за напрямком φ' прийнято круговий середній напрямок випадкового кута $\psi(\omega)$. Множина значень кругової дисперсії належить інтервалу $[0, 1)$.

Кругова медіана. Для одновершинних неперервних розподілів медіана завжди визначається однозначно. Такі розподіли на колі відрізняються тим, що в інтервалі $[0, 2\pi)$ існують два такі кути φ_1 і φ_2 , що під час руху точки по одиничному колу від φ_2 до φ_1 в обох напрямках функція $p(x') = dF(x')/dx'$ є монотонно не спадною.

Інша важлива властивість медіани випадкового кута стосується його кругового середнього відхилення: у випадку одновершинного розподілу кругове середнє відхилення досягає мінімуму в точці μ_m .

Асиметрія. Для оцінки асиметрії закону розподілу ймовірності випадкового кута вводиться коефіцієнт асиметрії

$$\gamma_c = \frac{\beta_2(\mu_1)}{v^{3/2}}. \quad (3.41)$$

Коефіцієнт γ_c характеризує асиметрію закону розподілу ймовірності випадкового кута відносно напрямку $\theta = \mu_1$ і дорівнює нулеві для симетричних розподілів ймовірності.

Ексцес. Згладжуваність кривих розподілу ймовірності випадкових кутів в околі їх моди характеризує *коефіцієнт ексцесу*

$$\gamma_e = \frac{\alpha_2(\mu_1) - (1-\nu)^4}{\nu^2}. \quad (3.42)$$

Коефіцієнт γ_e порівнює криві всіх законів розподілів ймовірності випадкових кутів з намотаним гауссовим розподілом, для якого $\gamma_e = 0$ (коефіцієнт ексцесу близький до нуля і для розподілу Мізеса).

Кругове стандартне відхилення. Характеристична функція дозволяє встановити зв'язок між дисперсією σ гауссової випадкової величини і круговою дисперсією ν випадкового кута з намотаним гауссовим розподілом. Для $n=1$ маємо $\exp(-0,5\sigma^2) = \rho_1 = 1 - \nu$, звідки отримуємо

$$\sigma = \sqrt{-2\ln(1-\nu)}, \quad \sigma \in [0, \infty). \quad (3.43)$$

Значення σ також можна використати як міру розсіювання випадкових кутів (в певному сенсі вона нагадує середньоквадратичне відхилення і, як правило виражається в радіанах).

Ці числові характеристики у порівнянні з відповідними характеристиками випадкових величин наведені у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Хар-ка	Випадкова величина	Випадковий кут
1	2	3
Випадкові величина, кут	Дійсною випадковою величиною називається функція $\xi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega\}$ та областю значень $X \subset R$ така, що для довільного $x \in X$ множина тих $\omega \in \Omega$, для яких $\xi(\omega) < x$ є подією A з множини випадкових подій \mathfrak{Z} , яка задана на фіксованому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{Z}, P)$.	Дійсним випадковим кутом є функція $\Psi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega\}$ та областю значень $\Theta \subset R$ така, що для довільного $\theta \in \Theta$ дробова частина кута $\psi(\omega) = \Psi(\omega) - [\Psi(\omega)/2\pi]^+ 2\pi = \Psi(\omega) \bmod 2\pi$ є випадковою величиною.

Характеристична функція	<p>Характеристичною функцією випадкової величини $\xi(\omega)$ називається математичне сподівання випадкової функції $\exp(iu\xi)$, тобто</p> $f(u) = \mathbf{M}e^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x),$ $u \in (-\infty, \infty).$	<p>Характеристичною функцією випадкового кута $\Psi(\omega)$ (послідовність тригонометричних моментів відносно нульового напрямку) називається математичне сподівання функції $\exp(j\rho\Psi)$:</p> $f_n = \mathbf{M}e^{in\rho\Psi} = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta') dG(\theta') =$ $= \rho_n \exp(i\mu_n),$ <p>де k – довільне ціле число; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$</p>
Квантілі законів розподілу	<p>Розв'язок рівняння $F(\alpha_\gamma) = \gamma$, де γ – задана ймовірність ($0 < \gamma < 1$) відносно $\alpha_\gamma \in (-\infty, \infty)$ називається квантилем розподілу $F(x)$ рівня γ, де</p> $\gamma = \int_{-\infty}^{\alpha_\gamma} p(x) dx$	<p>Розв'язок рівняння $G(\theta'_\gamma) = \gamma$, де γ – задана ймовірність ($0 < \gamma < 1$) відносно $\theta'_\gamma \in [0, 2\pi)$ називається квантилем розподілу $F(\theta)$ рівня γ, де</p> $\gamma = \int_0^{\theta'_\gamma} p(\theta) d\theta$
Модуль тригонометричного моменту	-	<p>Результуючою довжиною вектора, який є математичним сподіванням випадкового вектора $(\cos\Psi, \sin\Psi)$, є величина $\rho = f_1$.</p>
Перший початковий момент	<p>Математичним сподіванням випадкової величини $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається число, визначене інтегралом Стілтєса</p> $\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$	<p>Круговим середнім значенням випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$, для якого</p> $f_1 = \mathbf{M}e^{i\Psi} \neq 0$, називається кут $\mu_1 = \text{Arg} f_1$.
Розкид значень випадкової величини і випадкового кута	<p>Дисперсією $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається математичне сподівання квадрата відхилення значень $\xi(\omega)$ від її математичного сподівання $\mathbf{M}\xi$:</p> $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 dF(x).$	<p>Круговою дисперсією випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$, називається величина</p> $v = 1 - \rho = 1 - f_1 ,$ <p>яка характеризує відхилення значення випадкового кута від його середнього значення</p>

Медіана	Медіаною неперервного розподілу $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ називається таке значення $x = Me$, для якого однаково ймовірно, чи виявиться випадкова величина більшою чи меншою Me , тобто $P(\xi < Me) = P(\xi > Me)$.	Круговою медіаною неперервного розподілу на колі $G(\theta')$ випадкового кута $\psi(\omega)$ називається значення кута μ_m , яке є одним з рішень рівняння $Q(\mu_m) = F(\mu_m + \pi) - F(\mu_m) - 0,5 =$ $= \int_{\mu_m}^{\mu_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0,5 = 0,$ і $Q(\mu_m - 0,5\pi)$ максимально
Мода	Модою називається значення Mod випадкової величини $\xi(\omega)$, для якого щільність розподілу $p(x = Mod)$ має максимальне значення	Модою називається значення Mod випадкового кута $\psi(\omega)$, для якого щільність $p(\theta' = Mod)$ має максимальне значення

Вибіркові числові характеристики випадкових кутових величин. За результатами спостережень і попереднього опрацювання даних вимірювань отримують вибірку різниці кутів $(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M)$, $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ обсягу M . Ця вибірка розглядається як реалізація випадкових кутів, що мають певну неперервну щільність розподілу ймовірностей $p(x)$. За значеннями $(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M)$ вибіркові числові характеристики різниці ФХС визначаються наступним чином.

Вибірковий тригонометричний момент порядку n відносно заданого напрямку $\alpha \in [0, 2\pi)$ визначається за формулою:

$$\hat{f}_n(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M e^{iu(\varphi_j - \alpha)} = \hat{a}_n(\alpha) + i\hat{b}_n(\alpha) = \hat{r}_n(\alpha) e^{i\hat{m}_n(\alpha)}, \quad (3.44)$$

а вибіркові косинус- та синус-моменти порядку n – за формулами:

$$\hat{a}_n(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos[n(\varphi_j - \alpha)], \quad \hat{b}_n(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin[n(\varphi_j - \alpha)]. \quad (3.45)$$

Вибіркова характеристична функція – це комплекснозначна послідовність $(\hat{f}_n(0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, всі вибіркові тригонометричні моменти якої визначені відносно нульового напрямку $\alpha = 0$.

Використання вибіркових тригонометричних моментів в задачах апроксимації розподілів кутових даних за (4.33) розглянуто в [44], в роботі [46] – для визначення відношення сигнал/шум в адитивній суміші гармонічного сигналу та гауссового шуму.

Вибіркове кругове середнє. Результат окремого спостереження φ_j можна зобразити відповідним плоским кутом φ_j , якому відповідає на колі одиничного радіуса $R = 1$ дуга довжиною l_j між додатною напіввіссю абсцис та вектором $\overline{OP_j}$ (рис. 3.11,а). Вектор $\overline{OP_j}$ має декартові $[\cos \varphi_j, \sin \varphi_j]$ і полярні $(1, \varphi_j)$ координати.

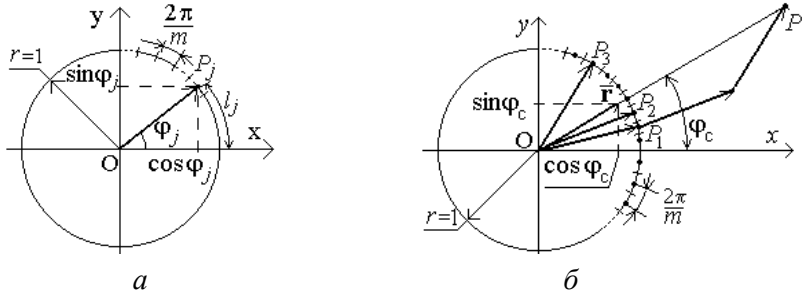


Рис. 3.11. Графічне зображення на колі результату одного вимірювання (а) та усереднення вибірки фазових зсувів об'єму $M = 3$ (б)

Вимірювання виконуються з певним кроком $2\pi/m$. Дискретному характеру результатів кутових вимірювань відповідає розбиття кола на m клас-інтервалів. Тому точки P_j – це середини клас-інтервалів.

Будь-яка конструктивна характеристика L кругового середнього, за якою опрацьовуються результати кутових вимірювань, повинна задовольняти умову адитивності

$$\{L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)\}(\bmod 2\pi) \equiv \{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\}(\bmod 2\pi), \quad (3.46)$$

тобто для довільного кута $v \in [0, 2\pi)$ дробові частини (за модулем 2π) чисел

$\{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\}$ та $L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)$ мають збігатися. Інакше кажучи кут, що задається характеристикою $L(\varphi_1, \dots, \varphi_M)$, повинен адитивно залежати від початкового кута v . Цій вимозі задовольняє оцінка у вигляді вибіркового кругового середнього, що визначається як напрямок суми всіх одиничних векторів $\overline{OP_1}, \dots, \overline{OP_M}$. На рис. 4.11,б розглянуто випадок $M = 3$. Сумарний

вектор $\overline{OP} = \sum_{j=1}^3 \overline{OP_j}$ має декартові координати $\left(\sum_{j=1}^3 \cos \varphi_j, \sum_{j=1}^3 \sin \varphi_j\right)$ і характеризується вибіркоким круговим середнім кутом φ_c . Фізичний зміст φ_c з

точки зору механіки пояснюється таким чином. Усі одиничні вектори закінчуються точками P_j одиничного кола. Якщо всім цим точкам приписати однакову “ масу ” M^{-1} , то координати “центра мас” цієї системи визначатимуться як

$$C = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j, \quad S = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j. \quad (3.47)$$

Перерахунок координат вектора \mathbf{r} з декатрової системи в полярну виконується відповідно до формул

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad (3.48)$$

$$C = r \cos \varphi_c, \quad S = r \sin \varphi_c. \quad (3.49)$$

Величину r називають вибірковою результуючою довжиною (ВРД) вектора \mathbf{r} .

Вектори \mathbf{r} та \overline{OP} розташовані у просторі під однаковим кутом φ_c до осі Ох. Значення φ_c обчислюють за формулою

$$\varphi_c = \mathbf{L}[S, C] = \arctg S/C + 0,5\pi \{2 - (\text{sign} S)(1 + \text{sign} C)\}. \quad (3.50)$$

Якщо $r = 0$, значення $\varphi_c \in [0, 2\pi)$ однозначно не визначається.

Для $r > 0$ вибіркове кругове середнє (ВКС) значення кута φ_c задовольняє вимогу (3.46), а r не залежить від початку відліку кутів. Дійсно, якщо кожний з векторів $\overline{OP_j}$ (рис. 3.11,б) повернути у просторі на кут $v \in [0, 2\pi)$, це приведе лише до повороту вектора \mathbf{r} у просторі на такий же кут v , але значення r не зміниться. Після повороту \mathbf{r} нові координати кінця вектора визначатимуться як

$$\bar{C} = r \cos(\varphi_c - v), \quad \bar{S} = r \sin(\varphi_c - v). \quad (3.51)$$

Неважко пересвідчитись, що

$$\bar{C} = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - v) = r \cos(\varphi_c - v), \quad \bar{S} = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - v) = r \sin(\varphi_c - v) \quad (3.52)$$

тобто $\varphi_c(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v) \equiv \{\varphi_c(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\} \pmod{2\pi}$,

$$r(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v) = r(\varphi_1, \dots, \varphi_M),$$

що і доводить властивість адитивності ВКС фазових зсувів.

Якщо покласти $v = \varphi_c$, то з урахуванням (3.52) маємо

$$\sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - \varphi_c) = 0, \quad (3.53)$$

Отримане рівняння (3.53) використовують для перевірки правильності визначення φ_c .

Прикладні питання застосування вибіркового кругового середнього розглядались в [49].

Вибіркова кругова дисперсія. Визначимо відхилення в просторі напрямку вектора $\overline{OP_j}$ від довільного напрямку v як

$$\Delta\varphi_j = \min \left\{ \left(\varphi_j - v \right)', 2\pi - \left(\varphi_j - v \right)' \right\} = \pi - \left| \pi - \left(\varphi_j - v \right)' \right|, \quad \Delta\varphi_j \geq 0, \quad (3.54)$$

де $\left(\varphi_j - v \right)'$ – залишок визначеного за модулем 2π кута $\left(\varphi_j - v \right)$,

$$\left(\varphi_j - v \right)' = \left(\varphi_j - v \right) - \left[\left(\varphi_j - v \right) / 2\pi \right]^+ 2\pi. \quad (3.55)$$

Зручною формою подання міри розсіювання є функція виду $f(\Delta\varphi) = 1 - \cos\Delta\varphi = 2\sin^2 \Delta\varphi / 2$ кута відхилення $\Delta\varphi$, оскільки вона є додатною і монотонною на відріжку $[0, \pi)$. Тому величину

$$V(v) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[1 - \cos(\varphi_j - v) \right] = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^M \sin^2 \frac{\varphi_j - v}{2} \quad (3.56)$$

прийнято за вибірку характеристику розсіювання вибірки кутів $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$ відносно напрямку v . З виразу (3.56) з урахуванням (3.53) випливає, що вибірка характеристика розсіювання відносно ВКС φ_c :

$$V(\varphi_c) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\{ 1 - \cos(\varphi_j - \varphi_c) \right\} = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - \varphi_c) = 1 - r. \quad (3.57)$$

Величину $V(\varphi_c) \in [0, 1]$ називають вибірковою круговою дисперсією (ВКД) вибірки (статистики) кутів $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$ сигналів. Ця характеристика інваріантна відносно початку відліку кутів.

З виразу (3.56) випливає, що вибір $v = \varphi_c$ мінімізує характеристику кругового розсіювання. Дійсно з (3.57) маємо:

$$V(v) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \left\{ 1 - \cos(\varphi_j - v) \right\} = V(\varphi) + 2r \sin^2 \left((\varphi_c - v) / 2 \right),$$

що і доводить це твердження.

Розглянуті вибіркові оцінки характеристик випадкових кутів зведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Найменування статистики	Зміст та визначення статистики
-------------------------	--------------------------------

Вибіркове кругове середнє статистики кутів	$\varphi_c = \left\{ \arctg \frac{S}{D} + \frac{\pi}{2} \left\{ 2 - (\text{sign} S) \times [1 + \text{sign} C] \right\} \bmod 2\pi; \right.$ $C = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j; \quad S = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j$
Вибіркова середня довжина результуючого вектора	$r = M^{-1} \sqrt{C^2 + S^2}$
Вибіркова кругова дисперсія статистики кутів	$V = 1 - r$
Кругове стандартне відхилення статистики кутів	$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)} = \sqrt{-2 \ln r}; \quad V = 1 - \exp(-0,5\sigma^2)$
Вибіркова кругова медіана статистики кутів	Куту відповідає точка кола P , діаметр PQ ділить значення статистики навпіл, в околі P маємо максимальну концентрацію значень
Вибіркова мода статистики фазових зсувів сигналів	Куту відповідає точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень статистики
Вибірковий круговий розмах статистики кутів	Довжина найменшої дуги статистики, що визначається з варіаційного ряду $T_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j, \quad j = 1, \dots, M-1;$ $T_M = 2\pi - \varphi_M + \varphi; \quad W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}$
Вибірковий тригонометричний момент порядку u відносно напрямку α (u - ціле число)	$T_u(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M e^{iu(\theta_j - \alpha)} = a_u(\alpha) + ib_u(\alpha) = r_u(\alpha) e^{im_u(\alpha)}$ $a_u(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos[u(\varphi_j - \alpha)]$ $b_u(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin[u(\varphi_j - \alpha)]$ $r_u(\alpha) = \sqrt{a_u^2(\alpha) + b_u^2(\alpha)} = \sqrt{a_u^2(0) + b_u^2(0)} = r_u(0);$ $m_u(\alpha) = m_u(0) - u\alpha$
Вибіркова характеристика асиметрії статистики фазових зсувів сигналів	$g_1 = \frac{b_2(m)}{V^{3/2}} = \frac{r_2 \sin[m_2(0) - 2m]}{V^{3/2}}.$
Вибіркова характеристика ексцесу статистики фазових зсувів сигналів	$g_2 = \frac{a_2(m) - (1 - V)^4}{V^2} = \frac{r_2 \cos m_2(0) - 2n - (1 - V)^4}{V^2}$

У випадку обчислення ВРД r за групованими в клас-інтервали даними, отримуємо зміщену в напрямі менших значень оцінку. Для зменшення зміщення застосовують поправку типу поправки Шеппарда [24]: $r_g = rc_g$, де $c_g = \pi/m \cdot \sin(\pi/m)$. Цією поправкою можна знехтувати якщо $m > 40$ оскільки $c_g(40) \approx 1.001$. Загальні питання використання кутових статистик у вимірюваннях розглядались в роботах [15, 4, 8], питання моделювання і опрацювання кутових даних – в [18, 20, 32], використання вибіркової кругової медіани – в [12, 14], застосування ВРД для виявлення сигналів ультразвукового неруйнівного контролю – в [8, 9, 11].

3.4. Моделі та міри випадкових кутів у фазових вимірюваннях

Моделі і міри випадкових кутів у фазових вимірюваннях розглянуто в роботах авторів [30, 49].

Ймовірнісна модель фазових зсувів гармонічних сигналів. Розглянемо дану задачу в постановці для випадку дискретних вимірювань.

Нехай на інтервалі спостереження $[0, T_c]$ задано ґратку

$$S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad (3.58)$$

де n – обсяг ґратки, множина елементів якої впорядкована і для неї виконується нерівність $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T_c$.

Елементи ґратки S розміщені рівномірно і утворюють арифметичну прогресію $t_j = t_1 + (j-1)\Delta t$, $j = \overline{1, n}$, де Δt – крок ґратки.

На ґратці S задано дві функції:

$$\begin{aligned} u_1(t_j) &= U_1 \cos(2\pi f t_j + \varphi), \quad t_k \in S, \quad \varphi \in [0, 2\pi); \\ u_2(t_j) &= U_2 \cos(2\pi f t_j), \end{aligned} \quad (3.59)$$

які є зображенням відповідних аналогових сигналів з дискретним аргументом (3.58). Множина S є областю визначення функцій (3.59), а множина всіх значень функцій $\{u_1(t_j), u_2(t_j), j = \overline{1, n}\}$ – областю їх значень. Функції (4.59) належать до лінійного нормованого функціонального простору L_n , тобто $u_1(t_j), u_2(t_j) \in L_n$. Для елементів простору L_n виконується операція скалярного добутку функцій

$$(u_m, u_l) = n^{-1} \sum_{k=1}^n u_m(t_k) u_l(t_k) h(t_k), \quad (360)$$

де m, l – номери елементів простору L_n ; $h(t_j)$ – вагова функція, $h(t_j) \geq 0$. Також задається норма кожного елемента простору L_n :

$$\|u_m\| = \sqrt{(u_m, u_m)}. \quad (3.61)$$

У просторі L_n функцій дійсного аргументу існує оператор зсуву

$$\mathbf{A}_{\Delta t} u_m(t_j) = u_m(t_j + \Delta t) = u_m(t_{j+1}). \quad (3.62)$$

Послідовно застосовуючи оператор зсуву (4.62) q разів, маємо

$$\mathbf{A}_{\Delta t} \dots \mathbf{A}_{\Delta t} u_m(t_j) = \mathbf{A}_{q\Delta t} u_m(t_j) = u_m(t_j + q\Delta t) = u_m(t_j + \tau), \quad (3.63)$$

де $\{\tau = q\Delta t, q \in \overline{0, \infty}\}$ – довільний зсув сигналу в часі на множині S .

Створення квадратурних сигналів потребує виконання умови: $T/\Delta t = 4s$, де $s \in N$. В цьому разі синусоїдні послідовності $u_1(t_j)$, $u_2(t_k)$ є періодичними з періодом $4s\Delta t$ для всіх $t_j \in T$, наприклад, $u_{1,2}(t_j) = u_{1,2}(t_j + 4\Delta t)$ якщо $s = 1$.

Розглянемо нормований скалярний добуток сигналів (3.59) із ваговою функцією

$$h(t_j) = g(t_j - a)g(b - t_j) = \begin{cases} 1, & t_j \in [a, b], \quad a < b, \quad a \in [0, T_c - b + a), \\ 0, & t_j \notin [a, b], \quad b \in (b - a, T_c]; \end{cases} \quad (3.64)$$

де $g(t_j)$ – одинична східчаста функція Хевісайда. Маємо:

$$C = \frac{(u_1(t_j), u_2(t_j))}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_k)\|} = \frac{U_1 U_2 \sum_{j=1}^n \cos(2\pi f t_j + \varphi) \cos 2\pi f t_j g(t_j - a) g(b - t_j)}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} = \cos \varphi,$$

де норми функцій $u_1(t_j)$, $u_2(t_j)$ визначаються як

$$\|u_1(t_j)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a} (u_1(t_j), u_1(t_j))} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}; \quad \|u_2(t_j)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a} (u_2(t_j), u_2(t_j))} = \frac{U_2}{\sqrt{2}}.$$

Застосуємо до функції $u_2(t_j)$ оператор зсуву $\mathbf{A}_{\Delta t}$ і розглянемо нормований скалярний добуток цієї функції з $u_1(t_j)$:

$$S = \frac{(u_1(t_j), u_2(t_j + 3g\Delta t))}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} = \frac{U_1 U_2 \sum_{j=1}^n \cos(2\pi f t_j + \varphi) \sin 2\pi f t_j g(t_j - a) g(b - t_j)}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} = \sin \varphi.$$

Пару отриманих в такий спосіб чисел C і S можна розглядати як координати одиничного вектора \mathbf{z} , що починається в точці O і описує одиничне коло в декартовій системі координат xOy .

За наявності шумів і завад, які неминуче супроводжують процес вимірювання, отримані значення $S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}}$ відрізнятимуться від ідеальних значень S, C , а побудовані на площині xOy точки з координатами $(S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}})$ в загальному випадку не належатимуть одиничному колу, оскільки $|\mathbf{z}_{\text{ш}}| = \sqrt{S_{\text{ш}}^2 + C_{\text{ш}}^2} \neq 1$. Для зведення результатів експерименту до одиничного кола виконаємо нормування згідно з формулами

$$\hat{C} = C_{\text{ш}} / \sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}; \quad \hat{S} = S_{\text{ш}} / \sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}. \quad (3.65)$$

Таким чином, встановлено однозначну відповідність між положенням у просторі вектора $\mathbf{z}_{\text{ш}}$ і фазовим зсувом φ між сигналами (4.59), що для зазначеного випадку дозволяє використовувати ймовірнісну модель випадкових кутів на площині.

Параметри сигналу $u_1(t_j)$ визначають як:

$$\hat{\varphi} = \mathbf{L}[S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}}] = \arctg \frac{S_{\text{ш}}}{C_{\text{ш}}} + \frac{\pi}{2} \{ 2 - [\text{sign}(S_{\text{ш}})] \cdot [1 + \text{sign}(C_{\text{ш}})] \}, \quad (3.66)$$

$$U_1 = \sqrt{2} \|u_1(t_j)\|. \quad (3.67)$$

Під час виконання фазових вимірювань з перетворенням лінійної випадкової величини $\xi(\omega)$ з областю визначення $x \in (-\infty, \infty)$ у випадковий фазовий зсув сигналів $\psi(\omega) = K\xi(\omega) \pmod{2\pi}$ з областю визначення $\theta \in [0, 2\pi)$, де K – коефіцієнт перетворення, для ймовірнісного опису випадкових фазових зсувів доцільно застосовувати закони розподілів ймовірностей з сім'ї намотаних, які відповідають даному перетворенню. У багатьох випадках розподіл випадкових фазових зсувів задовільно апроксимується намотаним гауссівським розподілом ймовірності. Це припущення можна обґрунтувати з огляду на той факт, що випадковий характер $\psi(\omega)$ зумовлено дією значної кількості незалежних факторів. Згідно з центральною граничною теоремою на колі закон розподілу суми багатьох випадкових незалежних кутів прямує до намотаного гауссівського, який задовільно апроксимується розподілом Мізеса.

Ймовірнісна модель фазових зсувів випадкових вузькосмугових проце-

сів. Формування і передача інформаційних сигналів у фазових системах супроводжується впливом шумів і завад. З урахуванням того, що вхідними ланцюгами систем є лінійні ланки з обмеженою смугою пропускання $\Delta f \ll f_0$, вважатимемо, що на вході системи разом з інформаційним сигналом наявна завада у вигляді вузькосмугового випадкового процесу. У фазометрії [30] значення f_0 вважається відомим і дорівнює частоті опорного, детермінованого сигналу. Вузькосмуговий стаціонарний дійсний випадковий процес можна навести у вигляді

$$\xi(\omega, t) = A_\xi(\omega, t) \cos \Phi_\xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (3.68)$$

де $A_\xi(\omega, t)$, $\Phi_\xi(\omega, t)$ – відповідно обвідна і фаза (амплітудна і фазова характеристики) процесу $\xi(\omega, t)$.

Використання моделі (3.68) відповідає реальним умовам фазовимірювального експерименту. Розглянемо наступну задачу.

На скінченному інтервалі часу $[0, T_c]$ досліджуються процеси

$$\begin{aligned} \eta(\omega, t) &= u(t) + \xi(\omega, t), \\ u_0(t) &= U_0 \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in [0, T_c]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Процес $\eta(\omega, t)$ є випадковим процесом і визначається як адитивна сума інформаційного сигналу

$$u(t) = U \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = U_c \cos(2\pi f_0 t) - U_s \sin(2\pi f_0 t), \quad U > 0, \quad t \in T_c \quad (3.70)$$

та стаціонарного випадкового гауссового процесу $\xi(\omega, t)$ у виді (4.68) з характеристиками $\mathbf{M}\xi(\omega, t) = 0$, і $\mathbf{D}\xi(\omega, t) = \sigma^2$, який є відгуком вузькосмугової лінійної системи з резонансною частотою f_0 на білий шум. У формулі (4.70) $U_c = U \cos \varphi$, $U_s = U \sin \varphi$ – квадратурні компоненти сигналу, $U = \sqrt{U_c^2 + U_s^2}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ – початкова фаза, пов'язана з U_c , U_s співвідношенням $\varphi = \mathbf{L}[U_s, U_c]$.

Випадковий процес $\xi(\omega, t)$ належить до класу процесів другого порядку, тобто $\mathbf{M}\xi^2(\omega, t) < \infty$, $\forall t \in T_c$, що дозволяє застосувати до нього перетворення Гільберта [6, 49].

Випадковий процес $\eta(\omega, t)$ має фазу $\Phi_\eta(\omega, t)$.

Необхідно побудувати ймовірнісну модель фазового зсуву $\Delta\varphi(\omega, t) = [\Phi_\eta(\omega, t) - \Phi_0(t)] \bmod 2\pi$ між фазами процесів (3.69), де

$\Phi_0(t) = 2\pi f_0 t$ – фаза опорного сигналу $u_0(t)$.

Дослідимо процес $\eta(\omega, t)$, який задано виразом (4.69). Випадкова компонента $\eta(\omega, t)$ – процес $\xi(\omega, t)$, визначається виразом (4.68), в якому функції $A_\xi(\omega, t)$, $\Phi_\xi(\omega, t)$ однозначно визначаються за допомогою перетворення Гільберта [49].

У співпадаючі моменти часу випадкові процеси $\xi(\omega, t)$ та $\xi_n(\omega, t)$ некорельовані, що впливає з аналізу їх скалярного добутку

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, t) \cdot \xi_n(\omega, t)\} = R_{\xi\xi_n}(0) = 0. \quad (3.71)$$

Оскільки процеси $\xi(\omega, t)$ та $\xi_n(\omega, t)$ за умови задачі є гауссовими, то з їх некорельованості випливає і їх статистична незалежність.

У разі проходження процесу $\xi(\omega, t)$ через вузькосмугову лінійну систему з центральною частотою f_0 його фазу можна подати у виді

$$\Psi_\xi(\omega, t) = 2\pi f_0 t + \psi(\omega, t), \quad (3.72)$$

а сам процес $\xi(\omega, t)$:

$$\xi(\omega, t) = \xi_c(\omega, t) \cos(2\pi f_0 t) - \xi_s(\omega, t) \sin(2\pi f_0 t), \quad (4.73)$$

де $\xi_c(\omega, t)$ і $\xi_s(\omega, t)$ – дійсні незалежні стаціонарні гауссові випадкові процеси з нульовими математичними сподіваннями і дисперсією σ^2 :

$$\xi_c(\omega, t) = A(\omega, t) \cos \varphi(\omega, t); \quad \xi_s(\omega, t) = A(\omega, t) \sin \varphi(\omega, t). \quad (3.74)$$

З урахуванням (4.70) і (4.72) вимірювальний сигнал має вигляд

$$\eta(\omega, t) = [U_c + \xi_c(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) - [U_s + \xi_s(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (3.75)$$

Побудуємо гільберт-образ випадкового процесу $\eta(\omega, t)$

$$\eta_n(\omega, t) = [U_s + \xi_s(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) + [U_c + \xi_c(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (3.76)$$

Для переходу від випадкових процесів до випадкових величин розглянемо множини значень процесів (3.75), (3.76) у дискретні моменти часу $t_j = jT$, $j = 0, T_c/T$. З урахуванням того, що випадковий процес $\xi(\omega, t)$ за умовами задачі є стаціонарним, то і його складові $\xi_c(\omega, t)$ і $\xi_s(\omega, t)$ також стаціонарні процеси. Тому отримані у фіксовані моменти часу t_j вибіркові значення $\xi_c(\omega, t_j)$ і $\xi_s(\omega, t_j)$ можна розглядати як випадкові величини. Для моменту часу t_j маємо випадкову величину

$$\eta_j(\omega) = U_c + \xi_c(\omega); \quad \eta_{n,j}(\omega) = U_s + \xi_s(\omega). \quad (3.77)$$

Отримані у співпадаючі моменти часу пари миттєвих значень випадкових процесів $\eta(\omega, t)$ і $\eta_n(\omega, t)$ утворюють випадкові вектори $\bar{\eta}(\omega) = (\eta_j(\omega), \eta_{n,j}(\omega), j = 0, T_c/T)$, які відображаються на площині в декартовій системі координат xOy відрізками прямих ліній. Вектори починаються в центрі системи координат і закінчуються в точках з координатами $(\eta_j(\omega), \eta_{n,j}(\omega))$. На рис. 3.12 показано реалізацію \mathbf{p}_j випадкового вектора $\boldsymbol{\eta}$ і позначено окіл радіуса 3σ , якому з ймовірністю 0,997 належить множина точок з координатами $(\eta_j(\omega), \eta_{n,j}(\omega))$ для початкової фази $\varphi_j = \mathbf{L}[U_s, U_c]$.

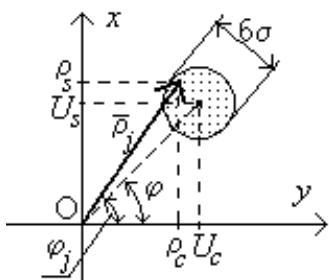


Рис. 3.12. Графічне зображення реалізації випадкового вектора $\boldsymbol{\eta}(\omega)$

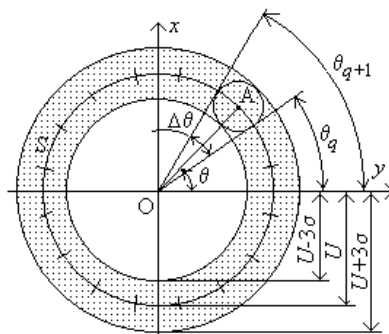


Рис. 3.13. Графічна побудова ймовірнісної моделі аргументу випадкового вектора на площині xOy

Кут $\varphi_j = \arg[\mathbf{p}_j]$ визначає напрям вектора \mathbf{p}_j у просторі xOy . Він відраховується від осі Oy в напрямку проти ходу годинникової стрілки.

Якщо змінювати значення φ в інтервалі $[0, 2\pi)$, то кут $\psi_j(\omega) = \arg[\boldsymbol{\eta}_j(\omega)]$ прийматиме всі значення в інтервалі $[0, 2\pi)$, а 3σ -окіл утворить кільце з внутрішнім радіусом $U - 3\sigma$, зовнішнім радіусом $U + 3\sigma$ і середнім радіусом U , тобто кільце товщиною 6σ , як зображено на рис. 3.13. Середній радіус U має зміст математичного сподівання модуля випадкового вектора $\boldsymbol{\eta}(\omega)$. Площа кільця становить $S = 12\pi U\sigma$. Кінці випадкових векторів $\boldsymbol{\eta}_j(\omega)$ можуть займати довільне положення в межах площі кільця. Ці вектори характеризуються двома компонентами, отже і ймовірнісну модель треба розглядати як сукупність моделей кутів і модулів випадкових векторів (або їх квадратурних компонент).

Ймовірнісна модель кута випадкового вектора. Розділимо кільце (рис.4.13) на скінченну кількість l однакових за площею частин. З цією метою спочатку розділимо коло середнього радіуса U на скінченну кількість l рівних дуг точками кола $\pi(2q+1)/l$, $q = \overline{0, (l-1)}$, почавши відлік q від осі Oy у визначеному в напрямку (на рис. 3.13 літерою A позначено одну з точок розбиття). Оскільки вузькосмуговий випадковий процес (3.76) допускає діапазон зміни значень обвідної в межах $\pm 3\sigma$, то немає сенсу виконувати розбиття кола на дуги значно менші ніж 6σ . Тому кількість інтервалів розбиття виберемо як найближче ціле до значення $\pi R/\sigma$ число. Вказані точки утворюють скінченне розбиття D_θ кола радіуса U .

Якщо з'єднати початок координат з точками розбиття кола, то утворяться центральні кути величиною $\Delta\theta$. Цим кутам відповідає розбиття кільця на l однакових частин площею $s = 6\Delta\theta U\sigma$.

Зафіксуємо елементарну подію ω_q , якій відповідає така сукупність умов: для довільних дійсних θ_q та θ_{q+1} таких, що $0 \leq \theta_{q+1} - \theta_q < 2\pi$, в інтервалі $[\theta_q, \theta_{q+1})$ знайдеться число θ , порівнянне за модулем 2π зі значенням $\psi(\omega)$. Це твердження формально дається таким виразом

$$\omega_q = \left\{ E_{\psi(\omega)} : \psi(\omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}, \theta \in [\theta_q, \theta_{q+1}) \right\}, \quad q = \overline{1, l-1}, \quad (3.78)$$

де $E_{\psi(\omega)}$ - область значень $\psi(\omega)$.

Таким чином, континууму значень напрямів $\arg[\eta(\omega)]$ в інтервалі $[0, 2\pi)$ поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій $\Omega = \{\omega_q, q = \overline{0, l-1}\}$, яку отримано розбиттям D_θ кільця на скінченне число l однакових його частин. Операції з усіма підмножинами Ω утворюють алгебру $\mathcal{B} = \beta(D_\theta)$.

Для завершення побудови моделі задамо ймовірності P_q подій $\omega_q \in \Omega$. З урахуванням циклічної природи кутів маємо

$$P_q = \begin{cases} P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q, \\ P\{0 \leq \psi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} + P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi < 2\pi\}, & \theta_{q+1} < \theta_q. \end{cases} \quad (3.79)$$

Для ймовірностей (4.79) виконується умова нормування: $\sum_{q=0}^{l-1} P_q = 1$.

Ймовірність довільної події $B \in \mathcal{B}$ у загальному вигляді

$$P(B) = \sum_{\{\omega_q \in B\}} P(\omega_q). \quad (3.80)$$

Для обчислення ймовірностей (3.79) залишається вибрати щільність розподілу ймовірності випадкових кутів, що породжує ймовірнісну міру. Функція $p(\theta)$ обґрунтовується для конкретних вимірювань.

Ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$, де $P = P(B)$, $B \in \mathcal{B}$ – ймовірність події B , задає область визначення моделі кутових спостережень сигналів під час статистичного вимірювального експерименту.

На множині Ω будується ймовірнісна міра $s(\omega_q)$, яка дорівнює довжині дуги середнього радіуса – $s(\omega_q) = 2\pi qU/l$, $q = \overline{1, (l-1)}$. Отже, $s(\omega_q)$, $q = \overline{0, (l-1)}$ є функцією від розбиття D_0 . Отже множина подій Ω відображається на числову множину $x(\omega) = \{s(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)}\}$, $x(\omega) \in X$. Підмножини $x(X)$ утворюють алгебру \mathcal{B} .

Для обчислення ймовірності $P(A \in \mathcal{B})$ довільних подій A необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу кутів. Оскільки випадковий вектор $\eta(\omega)$ розглядається як вектор з незалежними гауссовими квадратурними компонентами, розподіл фази такого вектора задовільно апроксимується намотаним гауссівським законом розподілу ймовірності або розподілом Мізеса [49].

Отриманий ймовірнісний простір $\{X, \mathcal{B}, P_\psi\}$, де $P_\psi = \{P(A), A \in \mathcal{B}\}$, визначає область значень випадкового кута $\psi(\omega)$.

Ймовірнісна модель модуля випадкового вектора. Усі випадкові вектори мають модулі, що належать інтервалу $|\mathbf{r}_j(\omega)| \in (U + 3\sigma, U - 3\sigma)$, тобто закінчуються в площині кільця, зображеного на рис. 3.13. Побудуємо систему $(m-1)$ концентричних кіл з радіусами $\rho_g = U + 3\sigma(2g/m-1)$, $g = \overline{1, (m-1)}$. Суміжні кола разом з внутрішнім і зовнішнім колами утворюють систему m кругових кілець завтовшки $2\Delta\rho = 6\sigma/m$ і середнім радіусом $\rho_{g, \text{ср}} = U + 3\sigma((2g+1)/m-1)$, $g = \overline{1, (m-1)}$. Два суміжні концентричні кола зображено на рис. 3.14.

Виділимо елементарну подію ω_g , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних ρ_g та ρ_{g+1} таких, що

$\rho_{g+1} \in [U - 3\sigma, U + 3\sigma)$, $g = \overline{0, (m-1)}$, в інтервалі $[\rho_g, \rho_{g+1})$ знайдеться число ρ , яке дорівнює $\eta(\omega) = |\bar{\eta}(\omega)|$, тобто дорівнює довжині вектора $\eta(\omega)$. Це твердження можна записати як

$$\omega_g = \{E\eta : \eta(\omega) = \rho, \rho \in [\rho_g, \rho_{g+1})\}, \quad g = \overline{0, (m-1)}. \quad (3.81)$$

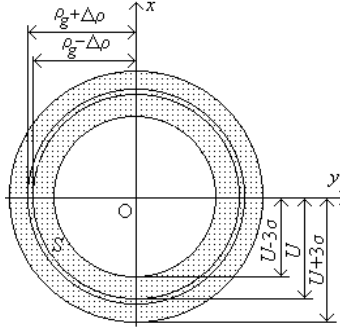


Рис. 3.14. Розбиття кільця системою концентричних кіл

Таким чином, континууму значень модулів $|\eta(\omega)| \subset [U - 3\sigma, U + 3\sigma)$ поставлено у відповідність скінченну множину $\Omega_\rho = \{\omega_g, g = \overline{0, (m-1)}\}$ елементарних подій, яку отримано розбиттям D_ρ кільця завтовшки 6σ на скінченне число m кілець однакової товщини $6\sigma/m$. Усі можливі об'єднання ω_g разом з порожньою множиною утворюють алгебру $\mathfrak{R}_\rho = \beta(D_\rho)$.

В завершення побудови моделі лишилось задати ймовірності P_g подій $\omega_g \in \Omega_\rho$. Ці ймовірності визначаються наступним чином:

$$P_g = P[\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}], \quad g = \overline{0, (m-1)}. \quad (3.82)$$

Ймовірність події $B_\rho \in \mathfrak{R}_\rho$ у загальному вигляді визначається як

$$P(B_\rho) = \sum_{\{j: \omega_g \in B_\rho\}} P(\omega_g). \quad (3.83)$$

Для ймовірностей (3.82) виконується умова нормування $\sum_{l=0}^{l-1} P_g = 1$.

Для обчислення ймовірностей (3.82) необхідно ввести функцію, яка породжує ймовірнісну міру. Якщо щільність ймовірності $p_\rho(x)$ модуля випадкового вектора відома, ймовірність (3.82) обраховується як

$$P_\rho(\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}) = \int_{\rho_g}^{\rho_{g+1}} p_\rho(x) dx. \quad (3.84)$$

Ймовірнісний простір $\{\Omega_\rho, \mathfrak{R}_\rho, P_\rho\}$, де $P_\rho = P(B_\rho)$, $B_\rho \in \mathfrak{R}_\rho$ – ймовірність події B_ρ , задає область значень моделі для модуля випадкового вектора.

На множині Ω_ρ побудуємо ймовірнісну міру $\rho(\omega_g)$, яка визначається величиною середнього радіуса $\rho_{g.\text{ср}} = U + 3\sigma(2g + 1/m - 1)$, $g = \overline{1, (m-1)}$. Отже, $\rho(\omega_g)$, $g = \overline{0, (l-1)}$ є функцією розбиття D_ρ . Отже множина подій з Ω_ρ відображається на числову множину $x(\omega) = \{\rho(\omega_g), g = \overline{0, (l-1)}\}$, $x(\omega) \in X$. Підмножини X утворюють алгебру \mathcal{B}_ρ .

Для отримання ймовірності $P(A \in \mathcal{B}_\rho)$ довільних подій A необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу ймовірностей модулів випадкового вектора.

Оскільки випадковий вектор $\boldsymbol{\eta}_j(\omega)$ розглядається як вектор з незалежними гауссовими квадратурними компонентами, розподіл модуля вектора має щільність розподілу ймовірності узагальненого розподілу Релея [50].

Отримані ймовірнісні простори $\{X, \mathcal{B}_\phi, P_\phi\}$ та $\{X, \mathcal{B}_\rho, P_\rho\}$ визначають ймовірнісну модель для вимірюванні фазових зсувів вузькосмугових випадкових процесів.

4. МОДЕЛІ ТА МІРИ ПРИ ДІАГНОСТУВАННІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Однією з найважливіших експлуатаційних характеристик енергетичного обладнання є його надійність. Основним джерелом інформації про його технічний стан є результати моніторингу, що базуються на вимірюванні фізичних процесів, які супроводжують його роботу. Отже, саме вимірювання діагностичних сигналів надають первинну інформацію для подальшого визначення технічного стану і, як наслідок, надійності обладнання, що діагностується.

Відомо [4, 72, 96], що точність та вірогідність результатів діагностування технічних об'єктів залежить від багатьох чинників і не в останню чергу, від якісно сформованих навчальних сукупностей, що за різними параметрами і характеристиками відповідають певним технічним станам досліджуваних об'єктів. Процес побудови таких навчальних сукупностей (мір) ґрунтується на точності результатів вимірювання діагностичних сигналів, а також залежить від інших факторів (коректний підбір множини можливих дефектів, врахування режимів роботи досліджуваного обладнання, рівень і характер завад, тощо).

В даному розділі розглядаються питання формування діагностичних сигналів у працюючому електроенергетичному обладнанні. Наведено результати побудови математичних моделей формування навчаючих сукупностей (мір), що відповідають різним технічним станам та режимам роботи досліджуваного електроенергетичного обладнання (ЕО). Розглянуто також приклади побудови розв'язуючих правил з діагностики та класифікації різних видів дефектів в окремих вузлах ЕО.

4.1. Фізичні процеси формування діагностичних сигналів

Розв'язання задач функціональної або тестової діагностики передбачає конкретизацію об'єкту дослідження. Це пов'язано зі специфікою функціонування і експлуатації цих об'єктів. Розглянемо питання формування інформаційних сигналів та їх використання для діагностування ЕО.

Основне *енергетичне обладнання* [4, 96] визначається як обладнання, призначене для вироблення (електричної енергії, пари, гарячої води), перетворення (хімічної енергії палива, що спалюється в теплову енергію пари або гарячої води), транспортування або передачі механічної енергії енергоносія (води, газу, пара, повітря стисненого, кисню, азоту і т. д.).

Основне енергетичне обладнання умовно поділяють на:

тепломеханічне: котли парові і водогрійні; котли утилізатори (котли охолоджувачі); турбіни парові і газові; допоміжне обладнання котельних установок; блоки поділу повітря; холодильні установки; обладнання газорозподільних станцій; компресори відцентрові і поршневі; нагнітачі (повітродувки, газодувки і екстаустери), коксові нагнітачі; димососи; насоси; ємності, що працюють під тиском (енергетичні); трубопроводи води (питної, гарячої, технічної, циркуляційної, шламів, водозниження), газу (природного, доменного, коксового та ін.), пару, теплофікації, повітря, кисню, азоту, водню та інших середовищ; канали зливових, технологічних, стічних вод; щогли і опори, лінії електропередач; арматура (запірна, регулююча), площадки обслуговування арматури трубопроводів, розташованих на висоті

і *електротехнічне*: генератори; двигуни; трансформатори; синхронні компенсатори; комутаційна апаратура; лінії електропередачі та інше мережеве обладнання; засоби управління захисту і автоматики; засоби обчислювальної техніки.

Технологічний процес виробництва, розподілу і споживання електричної і теплової енергії у вигляді узагальненої схеми наведено на рис. 4.1.

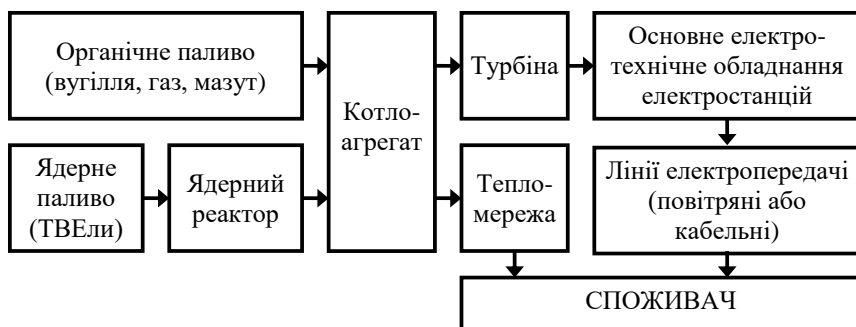


Рис. 4.1. Узагальнена схема технологічного процесу виробництва, розподілу та споживання електричної і теплової енергії

Основну увагу приділимо питанням вимірювання фізичних процесів і діагностування деяких видів електротехнічного обладнання. Водночас зазначимо, що фізичні процеси, які виникають під час роботи турбін приєднаних до електричного генератора, багато у чому схожі, оскільки мають сполучені обертові частини.

Відомі і практично використовуються різні методи діагностування ЕО [4, 18, 72, 96, 114, 115, 132]. Ці методи визначаються фізичним процесом, який породжує діагностичний сигнал, що вимірюється, для отримання інформації про технічний стан досліджуваного вузла.

Технічна діагностика об'єктів електроенергетики, як правило, здійснюється методами неруйнівного контролю. Неруйнівний контроль залежно від

фізичних явищ, покладених в його основу, розділяють на види (ДСТУ 2865-94): магнітний, електричний, вихрострумний, радіохвильовий, тепловий, оптичний, радіаційний, вібраційний, акустичний, проникаючими речовинами та ін.

В даній роботі як основні джерела отримання діагностичної інформації розглядаються вібраційні діагностичні сигнали, що виникають у вузлах досліджуваного ЕО. Ці сигнали вимірюються як безпосередньо на працюючому устаткуванні (функціональна діагностика), так і на устаткуванні, що знаходиться в неробочому стані. В останньому випадку діагностування здійснюється за допомогою спеціальних, як правило, ударних впливів (тестова діагностика). Зупинимось на дослідженні діагностичних сигналів, що виникають у вузлах працюючих електричних машин (ЕМ).

З досвіду експлуатації головною причиною аварій і ремонтів ЕМ є *порушення ізоляції* як між витками, так і між обмоткою і корпусом. Другим після обмотки за кількістю відмов є підшипниковий вузол [1, 10, 11, 16, 23]. В переважній більшості випадків відмови генераторів і електричних двигунів відбуваються через пошкодження обмоток (85...95%). Від 2% до 5% ЕМ відмовляють через пошкодження підшипників. На решту вузлів (щітково-колекторний вузол, система вентиляції та ін.) припадає 1...2 % відмов. Тому основну увагу приділимо питанням діагностування підшипників кочення та шихтованого магнітопроводу (ШМ), оскільки саме в пазах ШМ розташовується обмотка ЕМ.

Необхідно виділити конкретні вузли, в яких передбачається вимірювання діагностичних сигналів, а також визначити самі інформативні фізичні процеси, які дозволяють з певною достовірністю діагностувати технічний стан ЕМ.

Для ЕМ, особливо машин малої потужності, характерна велика різноманітність їх типів [14, 26, 37, 88, 92]. Кожний тип має свої слабкі вузли і вимагає особливого підходу при розробці моделі діагностичних сигналів і діагностичної інформаційно-вимірювальної системи (ІВС). В більшості випадків конструкції ЕМ далекі від дотримання принципу рівної надійності окремих вузлів. Наприклад, в асинхронних двигунах основним джерелом відмов є обмотка статора [26, 37]. В машинах постійного струму слабке місце – колектор-щітковий вузол. В ЕМ малої потужності, особливо високошвидкісних, значне число відмов припадає на підшипники кочення.

Істотний вплив на результати діагностики вузлів ЕМ чинять умови їх експлуатації і режими роботи. Так, для машин авіаційного застосування [14] найістотнішою вимогою є безвідмовність, тобто мала вірогідність випадкових несправностей; для енергетичних машин [26, 92] – значний ресурс, довговічність.

До числа основних вузлів типової ЕМ, які звичайно підлягають діагностуванню, відносяться [13, 14, 26, 37, 88, 92, 109, 130]: обмотки ротора і статора, шихтований магнітопровід ротора і статора, підшипникові вузли з підшипниками кочення, станина і місця її кріплення до фундаменту, щітково-колекторний вузол, елементи системи охолодження (крильцівка вентилятора, повітропровідні канали або канали для циркуляції охолоджуючої рідини та інше).

Для отримання інформації про технічний стан вузлів електротехнічного обладнання використовуються різні процеси, що виникають в ньому при його роботі, а саме – їх числові характеристики (параметри). Для проведення діагностики конкретних вузлів ЕМ зазвичай використовують такі фізичні процеси та їх параметри і характеристики:

обмотки: електричний опір міжвиткової ізоляції; температура поверхні обмоток; величина магнітної індукції;

шихтований магнітопровід: вібрації (переміщення, швидкість, прискорення) лобових частин; величина магнітної індукції; температура поверхні магнітопроводу;

підшипниковий вузол: вібрації (переміщення, швидкість, прискорення) підшипникового щита; температура підшипникового щита;

станина і місця її кріплення до фундаменту: акустична емісія; вібрація станини;

щітково-колекторний вузол: перехідний опір (провідність) ковзного контакту; вібрації (переміщення, швидкість, прискорення) щіткотримача; температура щіткотримача;

елементи системи охолодження ЕМ: аеродинамічний шум крильцівки вентилятора; вібрація поверхонь циркуляційних каналів для переміщення холодоагенту ЕМ.

Отже, майже для всіх вузлів ЕМ як інформаційний діагностичний сигнал використовуються їх *вібрації*. *Температура* поверхонь цих вузлів надає додаткову інформацію, щодо їх технічного стану. Для діагностування масивних вузлів (станина) ЕМ, що знаходяться під впливом значних електродинамічних навантажень, використовуються процеси *акустичної емісії*.

Стисло зупинимося на розгляді деяких питань, пов'язаних з первинним дослідженням (вимірюванням) вказаних вище процесів, які в розв'язанні завдань діагностики ЕМ виступають як діагностичні сигнали.

Вібрації електричних машин. До числа збурюючих впливів, що викликають вібрації ЕМ, належать:

електромагнітні сили;

сили, обумовлені роботою підшипників кочення;

аеродинамічні сили;

сили, обумовлені механічною незбалансованістю роторів;
сили, обумовлені роботою щітково-колекторного вузла.

Інтенсивність вібрацій за рахунок *електромагнітних сил* обумовлена, головним чином, основною частотою обертового магнітного поля [109, 114, 115]. Частоти їх вібрацій зосереджені в області подвоєної частоти мережі живлення. Збурюючі електромагнітні сили, що діють в повітряному проміжку ЕМ, можуть бути представлені у вигляді силових хвиль синусоїдної форми, кожна з яких має свою частоту і амплітуду, тобто система сил, що збурює вібрації, має полігармонічний характер і є, в основному, детермінованою.

Особливий вплив на характер вібрацій всієї ЕМ надають *вібрації підшипників кочення*. В разі установки акселерометрів на досліджуваних вузлах ЕМ (корпус, підшипниковий щит, щітково-колекторний вузол та ін.) вимірюються реалізації випадкового процесу, який являє собою адитивну суміш вібрацій, породжуваних різними збурюючими силами. Тому істотним моментом діагностування того чи іншого вузла ЕМ є вибір місць розташування акселерометрів. Так, наприклад, у випадку діагностування підшипників кочення акселерометри зазвичай розташовуються на підшипникових щитах, а якщо діагностується стан пресування шихтованого магнітопроводу – на притискній плиті статора [4, 109].

Аеродинамічний шум прямо пропорційно пов'язаний із збільшенням кількості охолоджуючого повітря, що підводиться до ЕМ для відводу тепла, що виділяється. Виникнення аеродинамічного шуму обумовлено [13, 109]:

роботою вентилятора, в якому відбувається розсічення повітряного струменя крайками лопаток і диском вентилятора;

обертанням ротора, в результаті чого відбувається зрив вихорів з його поверхні від розтину повітряного струменя головками обмоток ротора;

повітряним потоком, викликаним зривом вихорів з нерухомих перешкод в вентиляційних шляхах;

періодичним коливанням тиску на окремих ділянках аеродинамічного ланцюга, а також пульсаціями потоку повітря, що виходить з радіальних вентиляційних каналів ротора і входить в радіальні вентиляційні канали статора.

Вібрації ЕМ, порушені дисбалансом ротора, проявляються на частотах, кратних частоті обертання, і носять, в основному, детермінований характер. Основні причини, що породжують дисбаланс ротора: неякісне балансування ротора в зборі, тепловий перегрів, наявність внутрішніх залишкових напружень в бочці ротора від термомеханічної обробки поковки, роз'єднання кріплення посадки заліза ротора на вал [4, 13, 109, 114, 115, 131].

Шум і вібрації щітково-колекторного апарату обумовлені, в основному, такими причинами технологічного і конструктивного характеру: технічним станом колектору, пов'язаним з виступом окремих пластин і прокладок, биттям колектору; фізичними процесами, що відбуваються в ковзному контакті; поганим станом щіток і щіткотримача (перекіс щітки, неприпустимі величини зазорів між щіткою і щіткотримачем, недостатній тиск на щітку та ін.); режимом роботи ЕМ [13, 109].

Наведені в [109] результати досліджень показують, що частотний діапазон віброакустичних процесів, обумовлених роботою щітково-колекторного апарату, коливається від 1 до 8 кГц, а спектральний склад цих процесів суттєво залежить від частоти обертання.

4.2. Моделі формування навчаючих сукупностей (мір) для діагностування електроенергетичного обладнання

Сучасний етап розвитку технологій, які застосовуються в енергетичному виробництві, характеризується суттєвим збільшення інформаційного обміну між елементами енергосистеми на всіх її ієрархічних рівнях. Електроенергетичні системи (ЕС) розвинутих країн світу переходять до використання інтелектуальних мереж, побудованих на основі концепції Smart Grid, що висуває нові вимоги і перед засобами забезпечення надійності як енергосистеми в цілому, так і її компонентів. З'являється необхідність у формуванні цілісної багаторівневої системи управління, яка забезпечує високий рівень автоматизації та надійності всієї ЕС, охоплює виробників електроенергії, передавальні та розподільчі мережі, споживачів. Важливе місце посідає отримання актуальної інформації про фактичний стан кожного елемента електричної мережі (ЕМ) та обмін цією інформацією між багатьма учасниками, що в сукупності забезпечує підвищення надійності ЕС в цілому.

Одним з ключових завдань в електроенергетиці є розроблення методів та технічних засобів моніторингу для діагностики стану окремих пристроїв ЕС в реальному часі, забезпечення узагальнення такої діагностичної інформації, виділення з великого масиву даних тієї інформації, що є критично важливою для системи в цілому, та передачу її на вищий рівень ієрархії [69, 90].

Реалізувати поставлену мету можна шляхом створення інтелектуальної розподіленої багаторівневої системи моніторингу стану та діагностування електроенергетичних об'єктів (ЕЕО).

В ході практичного використання таких систем, які ґрунтуються на попередньому навчанні і орієнтовані на використання Smart Grid технологій, виникають питання, пов'язані з принципами побудови навчаючих сукупностей та подальшою організацією їх використання для визначення технічного

стану певного енергетичного об'єкту або його вузлу. Слід зазначити, що системи моніторингу і діагностування, побудовані за Smart Grid технологією мають працювати у режимі реального часу, тобто така система повинна оперативнo знаходити у банку навчаючих сукупностей відповідну сукупність, яка містить інформацію як про вид дефекту цього об'єкту, так і про режим його роботи.

Розглянемо питання розроблення моделей формування просторів діагностичних ознак (мір), що відповідають різним технічним станам вузлів ЕО, яке працює у різних режимах (швидкість обертання ротора ЕМ, температура вузлів, що діагностуються, різні ступені електродинамічного та механічного навантаження та ін.).

У випадку проведення функціональної діагностики під час формування навчаючих сукупностей виникає задача вибору діагностичних просторів. У сучасній математиці «... *простір* – це логічно мислена форма (або структура), яка слугує середовищем, де здійснюються інші форми та ті чи інші конструкції ...» [67]. У нашому випадку під *простором* будемо розуміти *множину будь-яких об'єктів*, які називають його точками; ними можуть бути геометричні фігури, функції, стан фізичної системи та ін.

Як координати діагностичних просторів зазвичай обирають параметри або функціональні характеристики діагностичних сигналів, які виявилися найбільш чутливими до зміни технічного стану досліджуваних об'єктів [4, 16, 59, 72]. Мірність діагностичного простору безпосередньо пов'язана з кількістю координат, за якими з допомогою сенсорів здійснюється вимірювання діагностичних сигналів.

Позначимо простір діагностичних ознак через Ω . В разі вибору статистичних діагностичних моделей як сукупності діагностичних ознак до складу Ω зазвичай входять певні статистичні параметри і характеристики, які є найінформативнішими до виявлення наявності та класифікації різних видів дефектів у вузлах ЕО.

Параметри та характеристики діагностичних сигналів $\xi(\omega)$ можна отримувати, розглядаючи їх як реалізації випадкових процесів або полів

$$\begin{array}{l} \xi(\omega) \begin{array}{l} \nearrow \xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T \\ \searrow \xi(\omega, r, t), \quad \omega \in \Omega, \quad r(x, y, z), \quad t \in T. \end{array} \end{array} \quad (5.1)$$

Враховуючи таке уявлення про вимірювання діагностичних сигналів, формування діагностичного простору схематично зображено на рис. 4.2.

У верхній частині рис. 4.2 наведено Ω – простір сукупності діагностичних ознак, які визначаються відповідними статистичними параметрами та характеристиками. Як показали теоретичні і експериментальні дослідження, серед таких параметрів найінформативнішими є початкові ν_j та центральні μ_j моменти (комулянти) $j = \overline{1, n}$ до n -го порядку включно, а серед характеристик – кореляційна функція $R(\tau)$, спектральна щільність потужності $S(f)$, щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ та характеристична функція $f(t, u)$ [4, 15, 59, 72, 96].

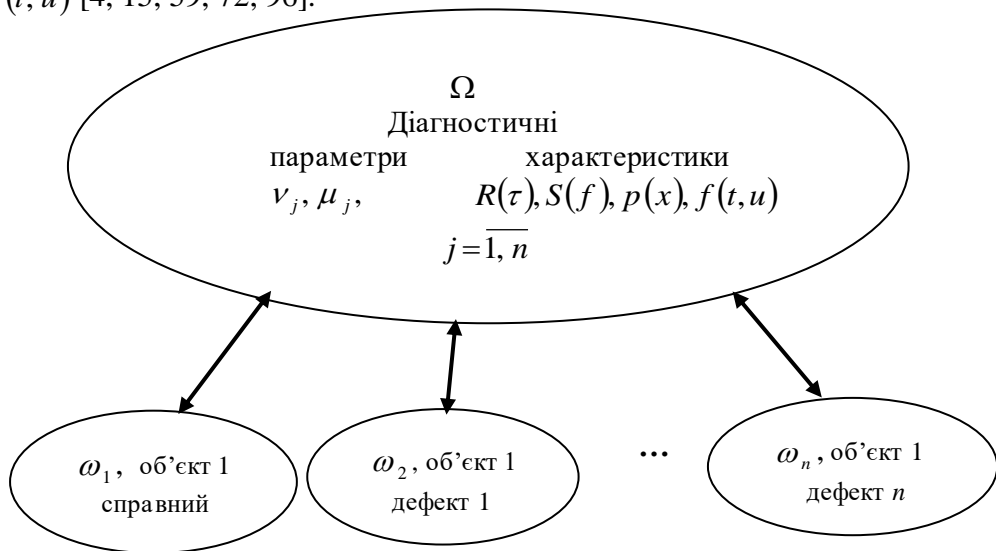


Рис. 4.2. Схематичне зображення формування діагностичного простору

Визначальним моментом діагностування технічного стану вузлів ЕО є класифікація певних видів дефектів, які можуть виникати у досліджуваних вузлів ЕО. Слід зазначити, що важливим моментом при формуванні навчальних сукупностей таких дефектів є вибір певного об'єкту діагностування. Саме від вибору об'єкту (або вузла, що входить до його складу) залежить інформативність тих чи інших діагностичних ознак. У нижній частині рис. 5.2 схематично наведено принцип побудови підпросторів сукупностей діагностичних ознак $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, що відповідають справному стану об'єкту або наявності певних видів дефектів (дефект1, дефект 2, ..., дефект n) та входять до складу простору Ω

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Omega. \quad (5.2)$$

Наведена сукупність підпросторів будується окремо для кожного з об'єктів діагностування. Умовно на рис. 4.2 ці підпростори побудовані для

об'єкту 1, в якості якого може бути обраний будь-який об'єкт ЕО, наприклад, потужні роторні ЕМ, трансформатори, двигуни власних потреб тощо.

Наступним кроком створення навчаючих сукупностей є умовне розбиття вибраного об'єкту діагностування на окремі складові (вузли). Наприклад, основними елементами для роторних ЕМ є обмотка, щітково-колекторний вузол, підшипники кочення (або ковзання для потужних електричних машин), вузол охолодження тощо. На рис. 5.3 наведено приклад формування таких сукупностей $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3$ для окремих вузлів ЕМ, а саме, обмотки, підшипників кочення та щітково-колекторному вузла, на які припадає близько 95% відмов [4, 26].

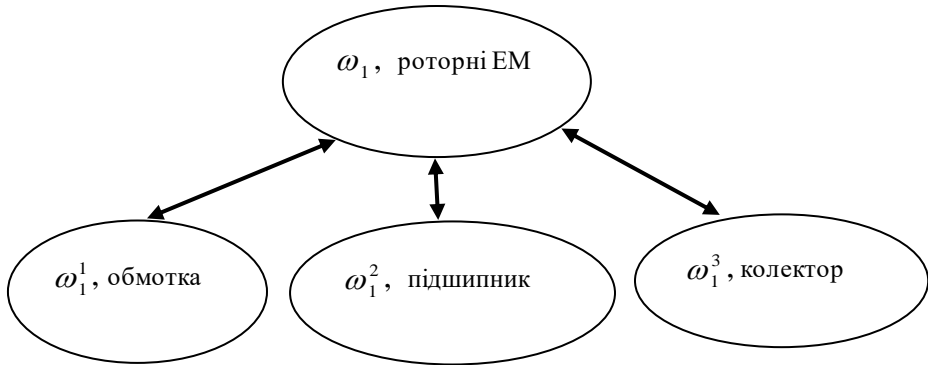


Рис. 4.3. Приклад формування мір для окремих вузлів роторних ЕМ:

Для детальнішого врахування виду дефекту для кожного із вказаних вузлів можна виконати подальший поділ підпросторів $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3$ на підпростори, що враховують найбільш типові дефекти для досліджуваного вузла. На рис. 4.4 наведено приклад формування навчаючих сукупностей (мір) для найтипівіших дефектів підшипників кочення ЕМ. До числа таких дефектів, зазвичай, відносять перекіс зовнішнього кільця, відсутність мастила, дефект (пітінг) доріжки внутрішнього або зовнішнього кільця, поламка сепаратора [4, 59, 133]. Вказаним дефектам на рис. 4.4 відповідають підпростори $\omega_{11}^2, \omega_{12}^2, \omega_{13}^2$ та ω_{14}^2 .

Аналогічним чином здійснюється формування навчаючих сукупностей для інших вузлів роторних ЕМ. Кількість сукупностей, що формується по кожному з вузлів ЕМ визначається типами дефектів, за якими треба проводити діагностування певного вузла ЕМ.

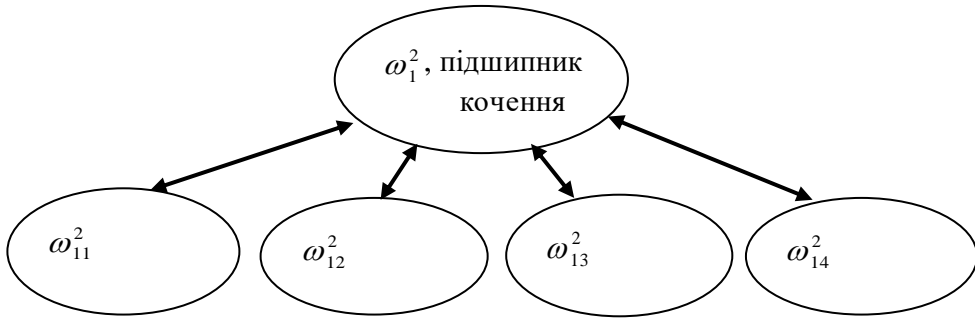


Рис.4.4. Приклад формування мір (навчальних сукупностей) для типових дефектів підшипників кочення ЕМ

Наведений підхід формування навчальних сукупностей (мір) передбачає практичне використання у системах моніторингу і діагностики модулів, побудованих за технологією Smart Grid. Такі системи за наявності попередньо сформованих навчальних сукупностей забезпечують отримання діагностичної інформації у реальному часі. А це, у свою чергу, в залежності від технічного стану ЕО або його вузлів, наявності та ступеня катастрофічності виявлених дефектів, дозволяють аргументовано виносити рішення про подальшу експлуатацію досліджуваних об'єктів.

Суттєвим моментом формування банку даних з навчальних сукупностей (мір) для діагностування ЕО є врахування режимів його роботи (швидкість обертання ротору ЕМ, температура вузлів, що діагностуються, різні супіні електродинамічного та механічного навантаження тощо). Це пов'язано з тим, що у випадку роботи системи моніторингу і діагностики ЕО у рамках концепції Smart Grid передбачається одержання оперативної інформації про стан цього обладнання у реальному часі, що, у свою чергу, вимагає врахування режиму роботи ЕО для відповідного моменту (або проміжку) часу. Розв'язати це завдання можна шляхом створення динамічного банку навчальних сукупностей, які являють собою діагностичні простори, побудовані для певних технічних станів досліджуваних вузлів ЕО і для певних режимів їх роботи.

Якщо у сформованих навчальних сукупностях для певного об'єкту водночас врахувати як множину можливих дефектів так і режими їх роботи, то сформовану множину діагностичних просторів можна представити у матричній формі

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{k1} & \omega_{k2} & \dots & \omega_{kn} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

У наведеній формі (4.3) підпростори, що розташовані за рядками, відповідають однаковим режимам, у яких експлуатується досліджуваного ЕО, а кожний стовпчик відповідає певному технічному стану цього вузлу. У сукупності підмножин ω_{nk} , індексом $j = \overline{1, k}$ позначається певний режим роботи ЕО, а індексом $p = \overline{1, n}$ – певний вид дефекту.

Оскільки у системах моніторингу і діагностики, що працюють в рамках концепції Smart Grid, здійснюється двосторонній обмін інформацією між об'єктом діагностування і оператором, до останнього одразу надходить інформація про технічний стан обладнання і режим його роботи. Відповідно, з банку навчальних сукупностей системи здійснюється вибір відповідного еталону (діагностичний підпростір ω_{kn}) для подальшого порівняння та прийняття рішення про технічний стан досліджуваного вузла. Ілюстративна схема побудови діагностичних просторів, у відповідності до матриці (4.3) має досить складний вигляд і в даній роботі не розглядається.

Як вже було зазначено, у рамках застосування концепції Smart Grid передбачається проводити обслуговування та ремонт ЕО за його фактичним станом. Це можливо реалізувати, маючи попередньо сформовані навчальні сукупності як за можливими видами дефектів вузлів ЕО, так і за режимами їх роботи. Тобто, для оперативного вибору певного еталону системі моніторингу необхідно мати майже миттєво інформацію про технічний стан та режими роботи досліджуваного об'єкту ЕО. Це може бути реалізовано на основі двостороннього обміну інформацією між вузлом, що діагностується та центральною системою діагностування [14], що передбачено технологією Smart Grid.

4.3. Побудова діагностичних просторів за результатами вимірювання інформаційних сигналів

Імовірнісні моделі діагностичних сигналів, обґрунтовані за результатами їх аналізу діагностичні ознаки, реальні електроенергетичні об'єкти і експериментальні випробувальні стенди, а також лабораторні зразки різних вузлів електротехнічного обладнання – необхідні складові, що дозволяють безпосередньо перейти до експериментів з діагностування таких об'єктів [4, 15, 59, 114]. Експериментальне дослідження запропонованих діагностичних

ознак проводиться на прикладі вібродіагностики підшипникових вузлів ЕМ, стану пресування пакету заліза шихтованого магнітопроводу, отримання характеристик вібрацій головного валу вітроелектричного агрегату (ВЕА), що працює у різних режимах навантаження.

Коротко зупинимось на описанні випробувальних установок та об'єктів, на яких здійснювались експериментальні дослідження.

У експериментах з вібродіагностики підшипників кочення на експериментальній установці та дослідженні вібрацій головного валу вітроелектричного агрегату використовувався лабораторний зразок [4, 59] інформаційно-вимірювальної системи (ІВС) *функціональної* вібродіагностики, а для діагностування стану пресування шихтованого магнітопроводу – ІВС *тестової* віброударної діагностики [4].

Установка для вібраційних випробувань підшипників кочення електричних машин. Для подальших досліджень доцільно проаналізувати вібрації підшипника кочення, «розв'язавши» його вібрації від вібрацій електроприводу. Для реалізації цієї ідеї в ІЕД НАН України була розроблена і виготовлена експериментальна установка для вібровипробування одиночних підшипників кочення. Загальний вигляд установки наведено на рис. 5.5. Її основне призначення полягало у експериментальній перевірці діагностичних ознак за наявності типових дефектів типу перекіс, відсутність мастила; дослідження пошкоджень зовнішнього або внутрішнього кільця підшипника внаслідок викришування металу (так званого пітингу).

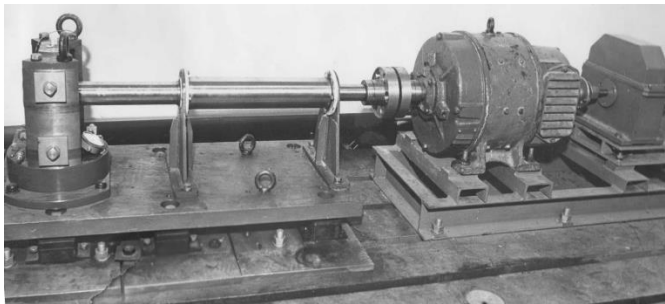


Рис. 4.5. Установка для вібраційних випробувань підшипників кочення

Установка конструктивно складається з трьох основних вузлів: електричного приводу, масивного валу, вузла кріплення і вимірювання вібрацій випробовуваного підшипника. Обертання випробовуваного підшипника, встановленого в вузлу кріплення і вимірювання вібрацій (зображений у лівій частині рис. 4.5), забезпечується електричним двигуном постійного струму типу П-51 через масивний вал. Цей двигун потужністю 11 кВт забезпечує обертання випробовуваного підшипника з будь-якою швидкістю в діапазоні

від 10 до 1500 об/хв. Застосування спеціальної муфти з гумовими пальцями дозволяє максимально знизити вібрації, зумовлені роботою електричного приводу. Крім того, зниження вібрацій валу експериментальної установки сприяє закріплення його в опорах з підшипниками ковзання, виконаними з фторопласту, а також розміщення валу і вузла кріплення та вимірювання вібрацій випробовуваного підшипника на масивній плиті.

Основне призначення вузла кріплення і вимірювання вібрацій підшипника – це можливість штучно відтворювати основні дефекти підшипника та розміщення первинної віброперетворювальної апаратури (акселерометрів). Для вимірювання віброприскорень досліджуваного підшипника використовувався акселерометр типу АВС-017, що дозволило вимірювати вібрації підшипника в смузі частот 20 Гц ... 30 кГц. Він встановлюється в радіальному напрямку по відношенню до випробовуваного підшипника. Детальне описання установки для випробувань підшипників наведено в [4, 59].

Установка для перевірки ступеня пресування пластин шихтованого магнітопроводу. Як об'єкт дослідження використовувалася частина шихтованого магнітопроводу малопотужного трансформатора, встановленого на спеціальному випробувальному стенді (рис. 4.6).

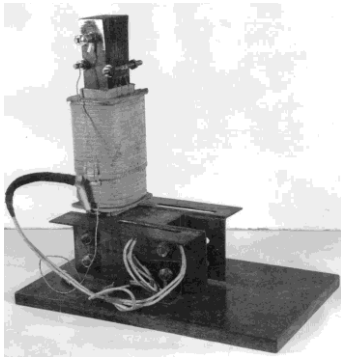


Рис. 4.6. Макет шихтованого магнітопроводу



Рис. 4.7. Ударний молоток

Пресування пластин магнітопроводу здійснювалось за допомогою шпильок, затягування яких проводилось динамометричним ключем з моментом 30 Н·м. Сигнал віброприскорення вимірювався за допомогою встановленого на досліджуваному магнітопроводі акселерометра. Використовуваний акселерометр типу АВС 17 дозволив вимірювати вібраційну хвилю в смузі частот 20 Гц ... 30 кГц, порушувану ударним молотком (рис. 4.7) в тілі шихтованого магнітопроводу.

Експеримент з діагностування стану пресування пластин магнітопроводу здійснювався наступним чином. За допомогою встановлених на шпильках затискних гайок, пакет пластин магнітопроводу стискувався із зусиллям 30 Н·м. Потім включався і налаштовувався лабораторний зразок ІВС ударної діагностики [4]. Після налаштування ІВС в напрямку, перпендикулярному до площини пластин, проводився удар, який фіксувався акселерометром, встановленим на молотку. Сигнал з акселерометра надходив на схему запуску ІВС ударної діагностики і відбувалось вимірювання вібраційного сигналу у тілі магнітопроводу акселерометром, що встановлювався на пластинах магнітопроводу.

Після цього повністю відпускалися гайки шпильок, якими було стягнуто пластини шихтованого магнітопроводу, і експеримент повторювався у вказаній послідовності.

Вітроелектричний агрегат ВЕА-20. Експериментальні дослідження з вимірювання вібраційного сигналу здійснювались на головному валу вітроенергетичної установки ВЕУ-20 виробництва ТОВ «Карбон» [16]. Основні технічні характеристики ВЕУ-20: номінальна потужність 20 кВт; номінальна швидкість вітру 9 м/с; номінальна напруга – 380/220В; частота вихідної напруги 50 Гц; частота обертання генератора 100 об/хв; максимальна робоча швидкість вітру 25 м/с; гранично допустима швидкість вітру 50 м/с; швидкість рушання 3 м/с; маса вітрогенератора ≤ 800 кг.

Блок сенсорів розташовувався на безпосередньо досяжному місці головного валу ВЕУ. Вимірювання проводилися після встановлення усталеного режиму обертання ротора вітроагрегату. Блок приймання та опрацювання інформації (БПОІ) [16] знаходився на рівні землі на відстані 40 м від початкового положення блока сенсорів. За допомогою програмного модуля БПОІ виконується наступне: управління блоком сенсорів; статистичне опрацювання вимірянних сигналів; навчання системи для визначення певного типу дефекту; побудова розв'язуючих правил та прийняття рішення з визначення технічного стану діагностованого вузла. Експерименти полягали у вимірюванні віброприскорень на головному валу ВЕА за різних рівнів споживаної електроенергії (потужності).

Перейдемо безпосередньо до розгляду питання формування навчаючих сукупностей у відповідності з (4.2) та (4.3). Нагадаємо, що за виразом (4.2) формуються моделі за видом дефектів, і саме за такого способу формувались навчаючі сукупності, побудовані за даними оброблення вібрацій підшипників кочення, які випробувались на установці (рис. 5.5). Оскільки деталі підготовки і проведення цих експериментів докладно описані у роботах [4, 59], розглянемо тільки вибраний діагностичний простір та міри сформовані за різним станом підшипників кочення.

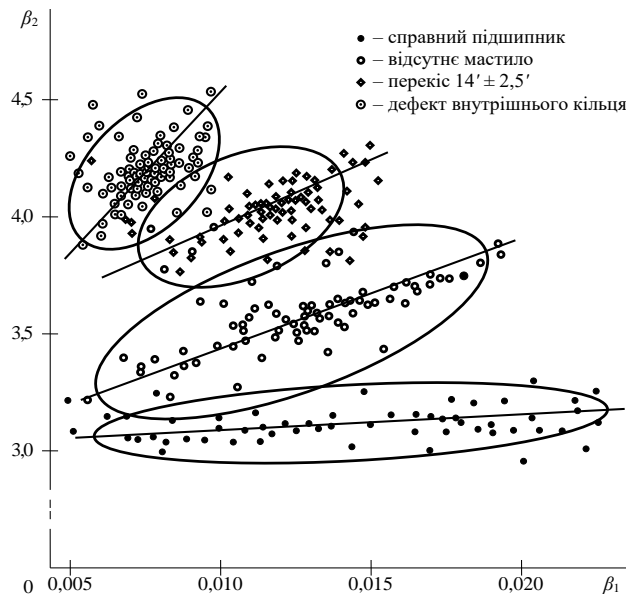
Експериментально встановлено, що найінформативнішими діагностичними ознаками є коефіцієнти асиметрії k і ексцесу γ досліджуваних вібрацій, які пов'язані з третім і четвертим моментами розподілу випадкових величин відомими співвідношеннями [4, 59].

У табл. 4.1 наведені спостережувані значення оцінок коефіцієнтів асиметрії k та ексцесу γ вібрацій підшипника 309 ЕШ₂, окремі екземпляри якого мали різні технічні стани і послідовно встановлювались у випробувальну установку.

Таблиця 4.1.

Умови випробування підшипника	Число вибраних для аналізу реалізацій	Інтервальні оцінки середнього значення коефіцієнтів	
		k	γ
Справний	60	$0,12 \pm 0,04$	$0,17 \pm 0,06$
Відсутнє мастило	89	$0,114 \pm 0,011$	$0,66 \pm 0,12$
Перекіс	75	$0,105 \pm 0,007$	$1,07 \pm 0,09$
Дефект внутрішнього кільця	85	$0,087 \pm 0,005$	$1,22 \pm 0,11$

Базуючись на цих даних, як діагностичний простір було обрано відому у статистиці діаграму Пірсона [4, 59] з координатами (β_1, β_2) . На рис. 4.8, як приклад, наведено типові навчальні сукупності у вигляді [4, 59] еліпсів розсіювання, сформованих в двовимірному діагностичному просторі (β_1, β_2) .

Рис. 4.8. Навчальні сукупності в двовимірному діагностичному просторі (β_1, β_2)

Діагностику дефектів за навчальними сукупностям зручніше проводити не в прямокутній системі координат (β_1, β_2) , а у полярній системі (ρ, φ) , перехід до якої здійснюється за співвідношеннями

$$\rho = \sqrt{\beta_1^2 + (\beta_2 - 1)^2}, \quad (4.4)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\beta_2 + 3}{\beta_1 + 4}. \quad (4.5)$$

З порівняння рис. 4.9 та діаграми Пірсона [4, 59] витікає, що області основних типів кривих (I, IV, VI) мають вигляд секторів, вершини яких починаються в точках з координатами, $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ та $\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$. Цим і обумовлюється перехід згідно (4.4) і (4.5) до нової системи координат. В цій системі навчальні сукупності, які відповідають різним технічним станам підшипників, виявляються витягнутими уздовж радіуса ρ і стиснутими за кутом φ . Тому перетин щільності розподілу в площині кута φ за фіксованого ρ виявляється більш чутливим до зміни типу кривої і її параметрів, ніж в будь-якій іншій площині.

Навчаючі сукупності, що представлені на рис. 4.8, можуть бути перетворені до одновимірного діагностичного простору і є гістограмами, побудованими за точками, які утворюють певний еліпс розсіяння, або згладжуючі ці гістограми криві (рис. 4.9).

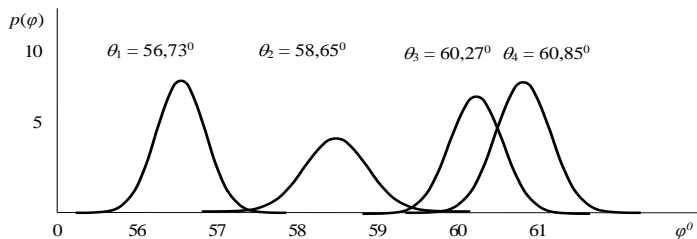


Рис. 4.9. Криві, що згладжують гістограми, побудовані за точками еліпсів розсіяння з рис. 4.8

Навчаючи сукупності для контролю стану пресування пластин шихтованого магнітопроводу було отримано за допомогою *макету шихтованого магнітопроводу* (рис. 4.6) та ударного молотка (рис. 4.7).

Отримані експериментальні дані є результатами вимірювання віброприскорення на поверхні досліджуваного шихтованого магнітопроводу. Ці вимірювання та подальша спектральне оброблення отриманого діагностичного сигналу здійснювалась за допомогою ІВС віброударної діагностики, докладно описаної у [4, 59].

Формування навчальних сукупностей (еталонів), що відповідають певним ступеням пресування пластин магнітопроводу проведемо для двох випадків:

- залежність тільки від ступеня пресування пластин (модель (4.2)), тобто залежність від дефекту;
- залежність від ступеня пресування та від режиму роботи (величини напруги, що подається на обмотку магнітопроводу, модель (4.3)).

У першому випадку експерименти полягали у вимірюванні вібраційних сигналів, збуджених ударним молотком (рис. 4.7) у масиві шихтованого магнітопроводу (рис. 4.6), який стискався із зусиллям 30 Н·м і повністю знятим зусиллям стиску. Після вимірювання ці реалізації вібрацій оброблялись на ІВС ударної діагностики за допомогою програми спектрального аналізу. За результатами такої обробки були отримані спектрограми $S(f)$ вібрацій магнітопроводу, дослідження яких переконливо довело, що найбільш ефективною діагностичною ознакою ступеня його пресування є кількість резонансних максимумів ν , зафіксованих на певному амплітудному рівні спектрограми $S(f)$. Докладно ці експерименти описані у роботах [4, 59], тут тільки нагадаємо, що саме за результатами обробки більш ніж 200 спектрограм вібрацій $S(f)$ вибирались діагностичні простори, у яких будувались навчаючи сукупності, що дозволяють діагностувати ступінь пресування магнітопроводу. Кожна така навчаюча сукупність являла собою гістограму розподілу резонансних максимумів для різного стану магнітопроводу. Але побудову розв'язуючих правил по виявленню стану пресування магнітопроводу зручніше вести не за гістограмами, а за згладжуваними ці гістограми кривим розподілу. Саме такі криві наведено на рис. 4.10.

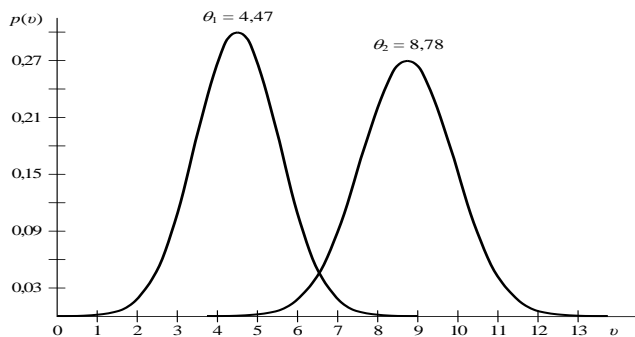


Рис. 4.10. Криві, що згладжують гістограми осередненої кількості ν максимумів спектрограми $S(f)$

У другому випадку шихтований магнітопровід випробувався у динамічному режимі, тобто на його обмотку (рис. 4.6) подавалась напруга різної величини, а пластини магнітопроводу стискалися із зусиллям різного ступеня. Надалі, у випадках комбінації різних умов випробування за допомогою молотка у тілі магнітопроводу збуджувалась ударна хвиля і за допомогою ІВС ударної діагностики здійснювались вимірювання та статистична обробка діагностичного сигналу.

Як і у вище розглянутому випадку, вимірювання проводилися для двох крайніх станів пресування магнітопроводу: «розпушеності» і спресованості за допомогою динамометричного ключа з зусиллям 30 Н·м. Зміна режиму роботи здійснювалась шляхом регулювання напруги на обмотці магнітопроводу. Вимірювались значення напруги U та струму I через обмотку. Сигнали віброприскорення шихтованого пакету магнітопроводу вимірювались за допомогою акселерометра АВС-017, після чого із застосуванням відповідного програмного забезпечення ІВС діагностування визначались кількісні оцінки параметрів σ , k та γ (табл. 4.2), а також будувались спектрограми $S(f)$, деякі з них наведено на рис. 4.11.

Таблиця 4.2

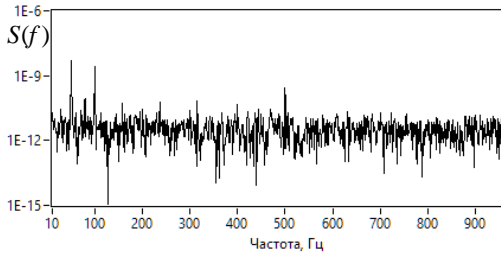
Ступінь навантаження			Стан пресування магнітопроводу					
	Напруга U , В	Струм I , А	Спресований			Розпушений		
			σ	k	γ	σ	k	γ
1	50	3,3	$0,161 \cdot 10^{-3}$	0,257	-0,119	$0,322 \cdot 10^{-3}$	0,023	-1,000
2	100	6,0	$0,240 \cdot 10^{-3}$	0,108	-0,036	$1,045 \cdot 10^{-3}$	-0,340	-1,100
3	150	9,1	$0,493 \cdot 10^{-3}$	0,131	-0,131	$4,322 \cdot 10^{-3}$	-0,028	-0,773

Як видно із наведених у таблиці 5.2 експериментальних значень, за умови розпушення магнітопроводу значення всіх досліджених параметрів змінюються, причому значення середньоквадратичного відхилення σ систематично збільшується, але не спостерігається певних закономірних змін кількісних оцінок коефіцієнтів асиметрії k та ексцесу γ . Отже, параметри k та γ не є інформативними і у випадку діагностування даного виду дефекту, а параметр σ є інформативним.

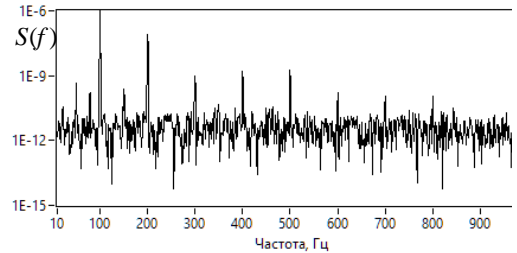
Поряд із залежністю середньоквадратичного відхилення σ від стану пресування магнітопроводу, спостерігалася чітка закономірність зростання його значення зі збільшенням струму через обмотку. При цьому можливі випадки, коли для різних станів пресування спостерігаються близькі значення σ , але за різного навантаження трансформатора. Отже, неможливо однозначно визначити стан пресування магнітопроводу трансформатора, використовуючи лише інформацію про середньоквадратичне відхилення σ сигналу віброприскорення. Необхідно додатково враховувати навантаження

трансформатора шляхом вимірювання електричних параметрів – струму або напруги.

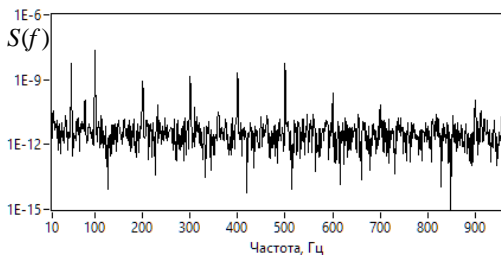
Результати проведених експериментальних досліджень щодо ступеня пресування магнітопроводу та струмового режиму обмотки магнітопроводу довели інформативність спектрального аналізу досліджуваних вібрацій. Аналіз отриманих спектрограм (рис. 4.11) показав, що у випадку розпушування магнітопроводу з'являються додаткові спектральні компоненти з високою амплітудою.



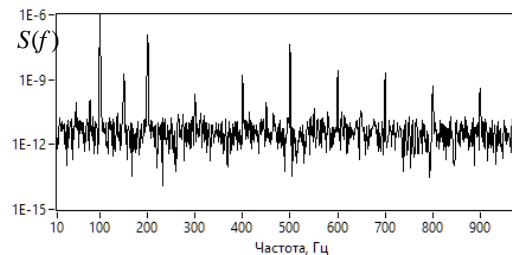
1) Напруга: 50В, струм: 3,5 А.
Магнітопровід спресований



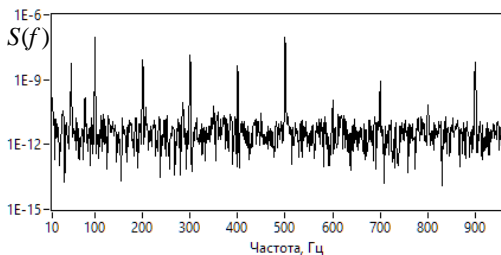
2) Напруга: 50В, струм: 3,5 А.
Магнітопровід розпушений



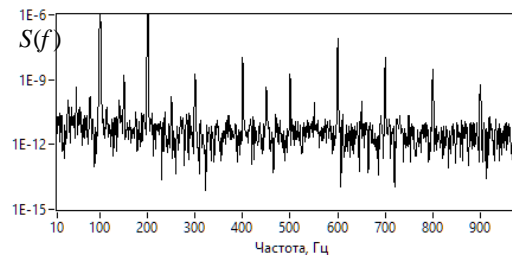
3) Напруга: 100В, струм: 6 А.
Магнітопровід спресований



4) Напруга: 100В, струм: 6 А.
Магнітопровід розпушений



5) Напруга: 150В, струм: 9,1 А.
Магнітопровід спресований



6) Напруга: 150В, струм: 9,1 А.
Магнітопровід розпушений

Рис. 4.11. Спектрограми вібрацій $S(f)$ магнітопроводу в залежності від ступеня навантаження обмотки

Наприклад, за низького навантаження (експеримент №1 – струм через обмотку близько 3,5 А; графіки 1 та 2 на рис. 4.11) у вібраціях спресованого магнітопроводу є дві чітко виражені частотні компоненти в області частот 50 Гц та 100 Гц, а також менш інтенсивна складова з частотою близько 500 Гц. При розпушенні магнітопроводу інтенсивність цих компонент змінюється і у спектрограмі додатково з'являються достатньо інтенсивні піки на частотах 200 Гц, 300 Гц, 400 Гц та ряд менш інтенсивних. При більшому навантаженні (експеримент №3 – струм через обмотку близько 9,1 А; графіки 5 та 6 на рис. 4.11) для спресованому магнітопроводі кількість суттєвих частотних компонент спектрограми – 7, а при розпушеному магнітопроводі їх кількість зростає до 9. В інших експериментах кількість спектральних піків змінювалася аналогічним чином.

Отже, кількість суттєвих максимумів спектрограм $S(f)$ можна вважати інформативною ознакою для діагностування ступеня пресування магнітопроводу трансформатора, але за умови урахування ступеня його навантаження. На етапі навчання системи діагностування на основі досліджень ряду отриманих спектрограм в автоматичному режимі вибирається рівень, що визначає, які частотні компоненти слід вважати суттєвими. Далі обчислюється кількість частотних максимумів, які перевищують цей рівень, і саме ця кількість використовується для формування навчальних сукупностей в межах одного режиму роботи досліджуваного об'єкта. Навчання системи здійснюється послідовно для різних режимів навантаження обладнання, яке діагностується.

За результатами подальшого дослідження певної кількості спектрограм $S(f)$ для кожного ступеня навантаження обмотки магнітопроводу можуть бути сформовані навчаючі сукупності для здійснення діагностування та моніторингу стану пресування магнітопроводу, що працює з різним ступенем навантаження.

В ході проведених експериментальних досліджень підтверджено інформативність середньоквадратичного значення σ сигналу віброприскорення, а також кількості суттєвих частотних максимумів у спектрограмі цього сигналу як діагностичних ознак для визначення ступеня пресування магнітопроводу трансформатора, а також необхідність врахування режиму проведення функціональної діагностики режимних параметрів, таких як напруга U або струм I через обмотку.

Експериментальні випробування вітроагрегату ВЕА – 20. У цих експериментах було використано умовно справний вітроагрегат ВЕА – 20. Основна мета експериментів – довести необхідність врахування режимів роботи ВЕА при формуванні навчальних сукупностей, а надалі і при діагностуванні певних дефектів у його вузлах.

Реалізації інформаційного сигналу отримувались шляхом їх вимірювання на досяжній частині валу ВЕА за допомогою сенсора. Для передачі вимірних даних до приймальних блоків ІВС вібродіагностики використовувався бездротовий канал, що дозволило здійснювати вимірювання діагностичних сигналів безпосередньо на рухомих частинах ВЕА – 20.

Випробування ВЕА здійснювалось у трьох режимах навантаження (споживчої потужності): 700 Вт, 5 кВт та 9 кВт. Зареєстровані вибірки в ІВС вібродіагностики оброблювались за допомогою програми гістограмного аналізу з метою отримання оцінок середньоквадратичного відхилення σ та коефіцієнтів асиметрії k та ексцесу γ . Результати цих експериментів зведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.3

№	Ступінь навантаження кВт	Оцінки статистичних параметрів		
		$\sigma \cdot 10^{-2}$	$k \cdot 10^{-2}$	γ
1	0,7	$0,29 \pm 0,04$	$0,10 \pm 0,04$	$1,238 \pm 0,023$
2	5,0	$0,57 \pm 0,07$	$0,099 \pm 0,021$	$1,74 \pm 0,07$
3	9,0	$0,64 \pm 0,05$	$0,12 \pm 0,03$	$1,50 \pm 0,06$

Наведені у таблиці дані було отримано за результатами опрацювання 150 реалізацій, вимірних на головному валу ВЕА – 20 для кожного ступеня навантаження віброагрегату.

За результатами проведених експериментальних досліджень підтверджено інформативність середньоквадратичного значення σ сигналу віброприскорення. Так, у відповідності з даними таблиці 5.3, відмічається стійке зростання значень σ разом із зростанням ступеня навантаження на виході ВЕА. Тобто, параметр σ може бути використаний в якості діагностичної ознаки і має бути врахований при формуванні навчаючих сукупностей для подальшої вібродіагностики вузлів ВЕА.

4.4. Правила визначення технічного стану об'єктів електроенергетики

Наступним і завершальним кроком проведення діагностування електроенергетичного обладнання є побудова розв'язуючих правил з діагностування і класифікації певних видів дефектів у вузлах ЕО. Коротко зупинимось на розгляді цих питань.

Для побудови розв'язуючих правил з діагностування конкретних дефектів в підшипниках скористаємося навчальними сукупностями, сформованими за результатами гістограмного аналізу досліджуваних вібрацій в діагностичному просторі ϕ у вигляді згладжуючих гістограми кривих (рис. 4.9).

Розподіли оцінок φ , які відповідають різним технічним станам випробувального підшипника, зміщені відносно один одного і мають різні математичні сподівання: справний підшипник - $\varphi = 56,73^\circ$; відсутність мастила - $\varphi = 58,65^\circ$; перекіс $14' \pm 2,5'$ - $\varphi = 60,27^\circ$; дефект внутрішнього кільця - $\varphi = 60,83^\circ$. Отримані криві відносяться до XIII, IV або VII типам кривих з системи Пірсона, тобто можуть бути апроксимовані нормальним законом розподілу [4, 59].

Для побудови розв'язуючих правил при діагностуванні зазначених дефектів в підшипнику можна використовувати класичну двохальтернативну процедуру перевірки статистичних гіпотез за Нейманом-Пірсоном, яка для нормального розподілу описується відносно простими математичними співвідношеннями.

Для діагностування технічного стану підшипників і класифікацією дефектів в них можуть бути побудовані двохальтернативні розв'язуючі правила, що зводяться до перевірки наступних гіпотез:

$$H_0: \theta_1 = 56,73^\circ \text{ (справний)} \leftrightarrow H_1: \theta_2 = 58,65^\circ \text{ (немає мастила);}$$

$$H_0: \theta_1 = 56,73^\circ \text{ (справний)} \leftrightarrow H_1: \theta_3 = 60,27^\circ \text{ (перекіс } 14' \pm 2,5');}$$

$$H_0: \theta_1 = 56,73^\circ \text{ (справний)} \leftrightarrow H_1: \theta_4 = 60,83^\circ \text{ (дефект кільця);}$$

$$H_0: \theta_2 = 58,65^\circ \text{ (немає мастила)} \leftrightarrow H_1: \theta_3 = 60,27^\circ \text{ (перекіс } 14' \pm 2,5');}$$

$$H_0: \theta_3 = 60,27^\circ \text{ (перекіс)} \leftrightarrow H_1: \theta_4 = 60,83^\circ \text{ (дефект кільця).}$$

На основі сформульованих гіпотез розглянемо конкретний приклад діагностування технічного стану підшипників 309 ЕШ₂, встановлених на випробувальній установці. Побудуємо розв'язуюче правило для діагностування відсутності мастила в підшипнику. Розв'язання завдання почнемо з планування експерименту.

Діагностування відсутності мастила в підшипнику 309 ЕШ₂ зводиться до перевірки основної гіпотези $H_0: \theta_1 = 56,73^\circ$ (підшипник справний) проти простий альтернативи $H_1: \theta_2 = 58,65^\circ$ (відсутнє мастило). Приймавши ймовірності помилок першого і другого роду $\alpha = 0,05$ і $\beta = 0,01$ і знайшовши для них значення за таблицями [2] стандартного нормального розподілу відповідні квантілі $u_{1-\alpha} = -1,645$ і $u_{1-\beta} = -2,326$, визначимо необхідну кількість спостережень і величину порога з урахуванням того, що дисперсія $\sigma^2 = 0,3933$:

$$n = \frac{(u_{\alpha} + u_{\beta})^2 \sigma^2}{(\theta_2 - \theta_1)^2} = \frac{6,202}{3,6864} \approx 2,$$

$$C = \frac{(\theta_2 - \theta_1)(u_\alpha - u_\beta)}{2(u_\alpha + u_\beta)} + (\theta_1 + \theta_2)/2 = 57,52^\circ.$$

Отримавши в результаті проведеного планування експерименту всі необхідні дані для побудови розв'язуючого правила, здійснимо діагностування відсутності мастила в конкретних зразках підшипників типу 309 ЕШ₂, встановлених на випробувальній установці.

Для перевірки технічного стану підшипників було довільно обрані чотири підшипника кочення, що послідовно випробувались на установці. В процесі випробувань виміряні і оброблені за програмою гістограмного аналізу за допомогою ІВС вібродіагностики по 2 вибірки, що містять вібрації випробовуваних підшипників в кожному з експериментів. Оцінки значень параметра φ вібрацій підшипників, встановлених на установці, наведені в табл. 4.4.

У відповідності з [4, 59], співвідношення порогової нерівності для даного випадку має вигляд

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \varphi_j \leq C.$$

Ліва частина наведеної порогової нерівності, після підстановки в неї даних з табл. 4.4 для 1 го ... 4 го зразків випробовуваних підшипників приймає значення, рівні $55,91^\circ$; $57,41^\circ$; $56,53^\circ$; $57,02^\circ$. Права частина зазначеної нерівності після підстановки в неї даних, отриманих при плануванні експерименту, дорівнює $57,52^\circ$. Таким чином, на основі отриманих результатів приймається гіпотеза H_0 – всі чотири екземпляри підшипників 309 ЕШ₂, що випробувались на установці – справні.

Після цього у всіх випробовуваних підшипниках видалялось мастило. Потім були проведені аналогічні експерименти з вимірювання і оброблення вібрацій підшипників, що працюють без змащення для всіх чотирьох досліджуваних екземплярів підшипників. Оцінки значень параметра вібрацій випробовуваних підшипників наведені в нижній частині табл. 4.4.

Таблиця 4.4.

Вимірюваний параметр	Номер досліджуваного підшипника			
	1	2	3	4
Справний підшипник				
φ_1	$55,28^0$	$56,92^0$	$57,10^0$	$56,03^0$
φ_2	$56,53^0$	$57,89^0$	$55,95^0$	$58,91^0$
$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \varphi_j$	$55,91^0$	$57,41^0$	$56,53^0$	$57,02^0$

Відсутнє мастило				
φ_1	55,99 ⁰	60,58 ⁰	59,70 ⁰	60,04 ⁰
φ_2	59,26 ⁰	56,10 ⁰	57,35 ⁰	60,36 ⁰
$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \varphi_j$	57,63 ⁰	58,34 ⁰	58,53 ⁰	60,20 ⁰

Після підстановки даних з таблиці у наведену порогову нерівність його ліва частина для 1-го ... 4-го випробовуваних підшипників набуває значень 57,63°; 58,34°; 58,53°; 60,20°, тобто для всіх чотирьох зразків підшипників 309 ЕШ₂ ліва частина порогової нерівності більше правої. Отже, на основі отриманих результатів приймається гіпотеза H_1 – в підшипниках відсутнє мастило. Аналогічно за гіпотезами, сформульованим вище, будуються розв'язуючі правила для діагностування інших видів дефектів.

Зупинимося на питаннях вибору діагностичних просторів і побудови навчальних сукупностей, відповідних різному ступеню пресування шихтованого магнітопроводу (рис. 4.6). У п. 4.3 були обґрунтовані діагностичні ознаки, статистичні оцінки яких можуть бути отримані на основі статистичного спектрального аналізу. Енергетичний спектр, що визначається в результаті такого аналізу, характеризує розподіл за частотами ударної вібраційної хвилі, яка порушується в досліджуваному магнітопроводі спеціальним ударним молотком (рис. 4.7).

Виходячи з розгляду спектрограм ударних вібраційних хвиль, що поширюються по тілу шихтованого магнітопроводу [1], можна відзначити, що найбільш інформативними діагностичними ознаками, що дозволяють діагностувати ступінь пресування шихтованого магнітопроводу, є: амплітуди A_f основних максимумів спектрограми $S(f)$; частоти f_n основних максимумів спектрограми $S(f)$; кількість v_j основних максимумів спектрограми $S(f)$ у фіксованій смузі частот.

Для діагностування ступеня пресування шихтованого магнітопроводу побудуємо двохальтернативне розв'язуюче правило, яке зводиться до перевірки гіпотез: $H_0: \theta_1 = 4,47$ (магнітопровід спресований із зусиллям 30 Н·м) проти $H_1: \theta_2 = 8,78$ (стягує зусилля в магнітопроводі відсутнє).

Проведемо перевірку основної гіпотези. Приймавши значення помилок першого і другого роду $\alpha = 0,05$ і $\beta = 0,01$ та знайшовши для них за таблицями [2] стандартного нормального розподілу відповідні квантілі $u_{1-\alpha} = -1,645$ і $u_{1-\beta} = -2,326$, визначимо необхідну кількість спостережень N і величину порога C , використовуючи вирази, наведені в [4, 59] при описанні правил перевірки статистичних гіпотез за методом Неймана-Пірсона.

Необхідна кількість спостережень з урахуванням того, що $u_{1-\alpha} = -u_{\alpha}$,
 $u_{1-\beta} = -u_{\beta}$

$$N = \frac{(u_{\alpha} + u_{\beta})^2 \sigma^2}{(\theta_2 - \theta_1)^2} = \frac{15,769 \cdot 4,36}{(4,31)^2} = 3,70 \approx 4 ,$$

$$C = \frac{(\theta_2 - \theta_1)(u_{\alpha} - u_{\beta})}{2(u_{\alpha} + u_{\beta})} + \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} = -\frac{2,935}{7,942} + 6,625 = 6,255$$

де σ - найбільше значення дисперсії серед кривих, наведених на рис. 4.10.
 Для даної задачі $\sigma = 2,09$.

Отримавши в результаті проведеного планування експерименту всі необхідні дані для побудови розв'язуючого правила, здійснимо діагностування ступеня пресування шихтованих магнітопроводів, подібних, представленому на рис. 4.6. Для перевірки ступеня пресування були довільно обрані п'ять таких магнітопроводів, які послідовно монтувалися і випробовувалися на стенді. В процесі випробувань за допомогою лабораторного зразка ІВС ударної діагностики виміряні по чотири вибірки, що містять вібрації шихтованого магнітопроводу. Кількість ν максимумів спектрограми $S(f)$ цих вібрацій на рівні 0,5 амплітуди $S(f)$ наведено в табл. 4.5.

Таблиця 4.5

Вимірюваний параметр	Номер досліджуваного магнітопроводу				
	1	2	3	4	5
Магнітопровід, стиснутий із зусиллям 30 Н·м					
ν_1	3	5	4	3	5
ν_2	1	3	4	4	6
ν_3	1	5	3	3	4
ν_4	2	5	4	2	4
$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \nu_j$	1,75	4,5	3,75	3	4,75
Магнітопровід без стискаючого зусилля					
ν_1	8	11	6	9	7
ν_2	7	8	7	10	9
ν_3	7	9	8	10	8
ν_4	5	8	7	11	9
$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \nu_j$	6,75	9	7	10	8,25

Ліва частина вказаної вище порогової нерівності після підстановки в нього даних з таблиці для 1-го ... 5-го зразків випробовуваних магнітопроводів набуває значень 1,75; 4,5; 3,75; 3; 4,75. Права частина порогової нерівності після підстановки в нього даних, отриманих при плануванні експерименту, дорівнює 6,255. Таким чином, на основі отриманих результатів приймається гіпотеза H_0 – досліджувані магнітопроводи стиснуті із зусиллям 30 Н·м.

Після цього у всіх випробовуваних магнітопроводах було знято стискаюче зусилля і було проведено аналогічні експерименти по вимірюванню та обробці вібрацій, викликаних ударним впливом, за всіма п'ятьма досліджуваними магнітопроводами. Оцінки значень параметра ν вібрацій випробовуваних магнітопроводів наведені в табл. 4.5. Після підстановки даних з таблиці у вираз для порогової нерівності його ліва частина для 1-го ... 5-го досліджуваних магнітопроводів приймає значення 6,75; 9; 7; 10; 8,25, тобто для всіх п'яти зразків ліва частина порогової нерівності більше правої, тому приймається гіпотеза H_1 – в магнітопроводах відсутнє стягуюче зусилля.

Отже, з розглянутого прикладу випливає, що число ν_j максимумів спектрограми вібрацій шихтованого магнітопроводу може використовуватись в якості діагностичної ознаки для визначення ступеня його пресування.

Аналогічно можуть бути побудовані розв'язуючі правила з діагностики стану пресування магнітопроводу при його роботі в динамічному режимі, тобто, при струмовому навантаженні його обмотки (рис. 4.6). Однак, у цьому випадку при побудові розв'язуючих правил треба користуватись навчаючими сукупностями, що відповідають певному ступеню навантаження, які, наприклад, наведено у табл. 4.3.

Відносна простота застосування розглянутих вище розв'язуючих правил в комплексі з лабораторним зразком ІВС ударної діагностики робить придатним для практичного використання розглянутий спосіб ударної діагностики шихтованих магнітопроводів.

Підсумовуючи зміст матеріалу, поданого у даному розділі можна констатувати, що запропонований підхід до формування навчаючих сукупностей (еталонів) дозволяє систематизувати користування цими навчаючими сукупностями при роботі у складі ІВС діагностики, які працюють за технологіями Smart Grid. В залежності від умов роботи досліджуваного обладнання, завдяки формалізованим правилам роботи з векторами (модель (4.2)) або матрицями (модель (4.3)), ІВС може оперативнo обирати необхідний еталон, не чекаючи, поки працююче обладнання досягне певних умов, для яких у банку даних є відповідна навчаюча сукупність.

5. ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ І МІР НА КОЛІ

Розроблені у кутометрії моделі і міри на колі найшли нове застосування в дослідженні циклічних процесів. Власне і слово “цикл” походить від грецького “*kuklos*” – коло, що є найбільш природною геометричною фігурою для відображення кутів. Під *циклом* розуміють сукупність взаємопов’язаних явищ чи процесів, що утворюють кругообіг протягом певного проміжку часу – *періоду*. Розділені цим проміжком часу значення процесу можуть і не співпадати абсолютно точно – суттєвим лишається повторюваність найбільш характерних ознак останнього. Процеси, в яких можна виділити цикли, називають *циклічними*.

Циклічні процеси можуть бути загасаючими і незагасаючими. Прикладом незагасаючого циклічного процесу є зміна сезонів пори року. Інші приклади – коливання фізичного маятника, загасаючі коливання електричних струмів у резонансному контурі, процеси зміни тиску крові у кровеносних судинах людини тощо.

Циклічні сигнали і їх граничний випадок – періодичні сигнали знайшли застосування у фазометрії. Основним об’єктом дослідження цієї галузі вимірювальної техніки є фазовий зсув між двома циклічними сигналами. Такі вимірювання відомі для широкого кола прикладних застосувань у радіотехніці, неруйнівному контролі, медицині, радіолокації і радіонавігації, захисті інформації тощо [32, 53, 71, 80] використання у фазометрії розроблених моделей і мір на колі дозволяє суттєво розширити можливості цієї галузі вимірювань.

Розглянуті приклади не охоплюють все різноманіття варіантів прикладного застосування моделей і мір на колі для вимірювань, проте переконливо свідчать про їх потужний методологічний потенціал.

5.1. Фазові системи ультразвукової луна-імпульсної товщинометрії

Під час контролю виробів з матеріалів зі значним загасанням ультразвукових коливань виникає задача виявлення ультразвукових імпульсних сигналів з гармонічним сигналом-носієм на фоні значних шумів. Ця задача має ефективне розв’язання через визначення дискретних фазових характеристик таких сигналів та подальший їх статистичний аналіз. Такий спосіб запропоновано і досліджено в [8, 49, 122].

Луна-імпульсний метод ультразвукової товщинометрії (УЗТ) ґрунтується на визначенні затримки τ_z , необхідної на поширення ультразвукового сигналу через об’єкт контролю. Остання, за відомої швидкості c по-

ширення повздовжньої ультразвукової хвилі у двох напрямка між поверхнею і дном об'єкта, однозначно визначає його товщину: $h = 0,5c\tau_3$. Зазвичай значення τ_3 оцінюють за інтервалом часу між обвідними двох донних ультразвукових сигналів. Такий спосіб дуже чутливий до наявності шумів.

Визначення τ_3 за фазовими характеристиками луна-сигналів має певні переваги у завадостійкості, а у сукупності зі статистичними методами опрацювання цих характеристик дає змогу виявляти сигнали УЗТ за відношення сигнал/шум (с/ш) близькому до одиниці і менше та використовувати їх для прецизійного вимірювання затримки τ_3 в конструкційних матеріалах зі значним загасанням ультразвукових хвиль.

Сутність запропонованого способу ультразвукової товщинометрії полягає в тому, що формують ультразвуковий зонduючий імпульсний сигнал, вводять його в об'єкт контролю, приймають сигнал після його поширення в об'єкті і відбиття від протилежної сторони об'єкту, визначають фазову характеристику відбитих сигналів (луна-сигналів), обчислюють різницю фаз луна-сигналів і сигналу-носія, проводять її ковзне віконне опрацювання, вираховують для відібраних вікном даних поточні значення r -статистики (ВРД), а час τ_3 знаходять за його максимумами. Товщину об'єкта обчислюють за формулою

$$h = 0,5\tau_{1,k}c/(k-1), \quad (5.1)$$

де $\tau_{1,k}$ - інтервал часу між першим і k -тим донними сигналами.

Цей спосіб дозволяє визначити послідовності загасаючих донних імпульсів в присутності значного за рівнем шуму, виділити затримку $\tau_{1,k}$ між першим і k -тим донними сигналами і за рахунок цього зменшити середньоквадратичне значення похибки квантування часового інтервалу $\tau_3 = \tau_{1,k}/k - 1$ в $\sqrt{k-1}$ разів.

Методологія цього способу ґрунтується на визначенні поточних значень r -статистики. Порядок отримання і статистичного опрацювання результатів фазових вимірювань наведено на рис. 5.1.

Експериментальне дослідження способу відбувалось наступним чином: в зразок з відомою товщиною (або часом поширення ультразвукового сигналу) випромінювався ультразвуковий зонduючий сигнал у формі радіоімпульсу. Аналізувався сигнал, який являв собою адитивну суміш періодичної (період повтору T_{II}) послідовності луна-сигналів і реалізації гауссового шуму $\xi(t)$ з нульовим математичним сподіванням і дисперсією σ^2 . Його дискретизований прототип має вигляд

$$u_d[j] = \sum_{i=1}^d k_{EAT,i} \cdot u_3(j - \tau - (i-1)T_d) + \xi[j],$$

де $k_{EAT,i}$ – коефіцієнти електроакустичного тракту для i -того луна-сигналу, $i = \overline{1, d}$, τ – затримка першого луна-сигналу відносно зонduючого, $j = \overline{1, N}$, N – обсяг вибірки, значення якої отримані в дискретні моменти часу jT_d , T_d – період дискретизації.

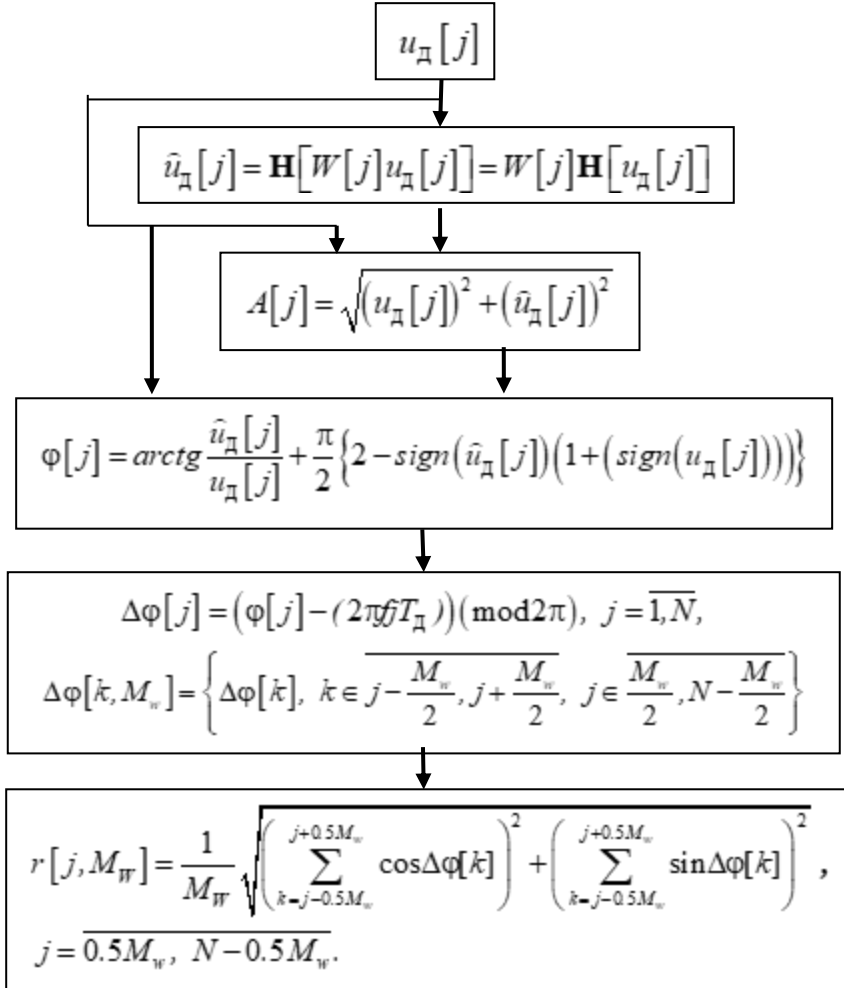


Рис. 5.1. Графічне представлення методики визначення r -статистики

Відношення с/ш визначалось величиною $U_{\max,i}/\sigma$, де $U_{\max,i}$ – максимальне значення обвідної i -того луна-сигналу.

Для проведення експериментальних досліджень такого способу УЗТ зроблено лабораторний стенд, структурна схема і загальний вид якого наведені відповідно на рис. 5.2 а, б.

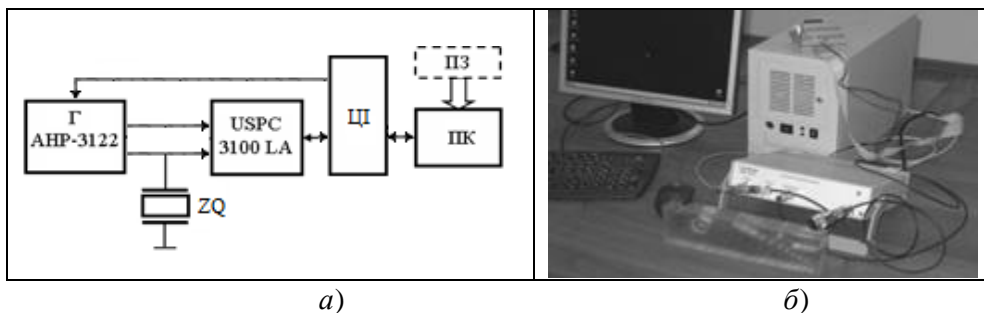


Рис. 5.2. Структура лабораторного стенду (а) (Г – генератор сигналів, ZQ – п’єзоелектричний перетворювач, USPC – ультразвуковий дефектоскоп, ПК – персональний комп’ютер, ЦІ – цифровий інтерфейс, ПЗ – програмне забезпечення), загальний вид стенду (б)

Для формування сигналу використовувався двоканальний генератор сигналів довільної форми АНР-3122 з такими характеристиками:

- смуга частот 0,02 Гц – 10 МГц;
- розрядність цифро-аналогового перетворювача – 12 біт;
- максимальна кількість точок на канал – 128 К;
- максимальна частота дискретизації сигналу 80 МГц;
- тривалість фронту прямокутного сигналу – 20 нс;

Використовувались два типи перетворювачів суміщеного типу: Panametrics C308 з робочою частотою 5 МГц та Panametrics C305 з частотою 2,25 МГц.

В якості пристрою попереднього оброблення сигналів УЗТ використовувався ультразвуковий дефектоскоп USPC 3100 LA виробництва компанії «Socomate» (Франція), виконаний конструктивно у вигляді PCI-плати для ПК. Дефектоскоп здійснює підсилення, фільтрацію та аналого-цифрове перетворення сигналу, попередню цифрову обробку експериментальних даних та зберігання результату в оперативному запам’ятовуючому пристрої для подальшої передачі пакетами в ПК. Основні технічні характеристики дефектоскопу USPC 3100 LA:

- смуга частот приймача 0,35-30 МГц;
- динамічний діапазон амплітуди сингалу – до 105 дБ;
- частота дискретизації АЦП – 100 МГц;
- розрядність АЦП – 10 біт.

Дослідження виконувалось на чотирьох зразках, акустичні властивості матеріалів зразків наведені в табл. 5.1.

Таблиця. 5.1

Матеріал	Товщина зразка	Час поширення сигналу, мкс	Густина $\times 10^3$ кг/м ³	Швидкість поперечної хвилі, 10^3 м/с	Модуль Юнга, ГПа	Коефіцієнт Пуассона	Коефіцієнт загасання на 2,5 МГц, Нп/м	Хвильовий опір Z, 10^6 Па·с/м
Зразок № 1 Сталь вуглецева (марка сталі 10 - сталь конструкційна вуглецева якісна) CO-2A	56	18,9	7,856	5,925	210 (при 20°C)	0,28	1,7	46,5
Зразок № 2 Нержавіюча сталь (12Х18Н10Т - сталь нержавіюча конструкційна криогенна: 0,12% - вуглець, 18% -хром, 10% -нікель)	17,8	6,2	7,920	5,742	198 (при 20°C)	0,30	2,2	45,4
Зразок № 3 Плексиглас СО1 (згідно ГОСТ 14782-86)	25,4	19,3	1,19	2,674	3,1	0,35	30	3,2
Зразок № 4 Фарфор-кераміка (Скловидна фаза)	10,9	5,5	2,27	3,942	59	0,17	0,3	8,9

Загальний вид зразків представлено на рис. 5.3.

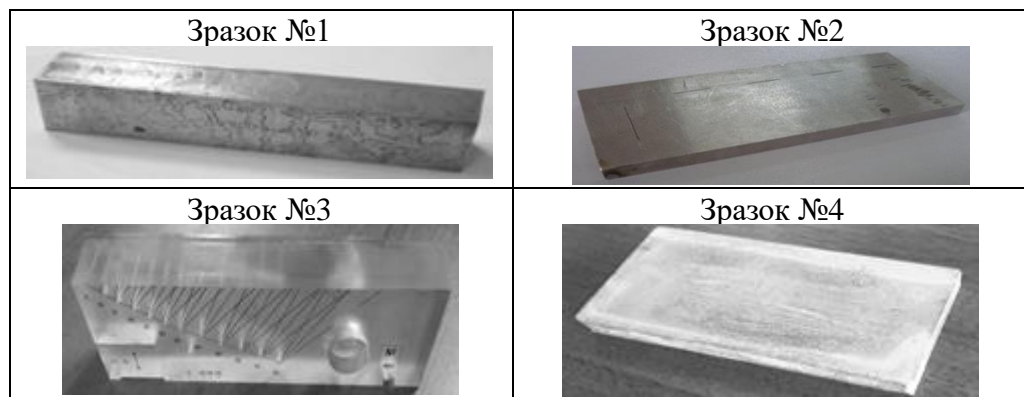


Рис. 5.3. Загальний вид досліджуваних зразків

У всіх дослідях частота дискретизації $f_d = 100$ МГц. Для прозвучування ОК застосовувався імпульсний сигнал з прямокутною обвідною і тривалістю 4 періоди сигналу-носія.

Зразок №1. Частота сигналу заповнення 2,3 МГц. Отримані в ході експерименту дані та результати розрахунків представлені на рис. 5.4.

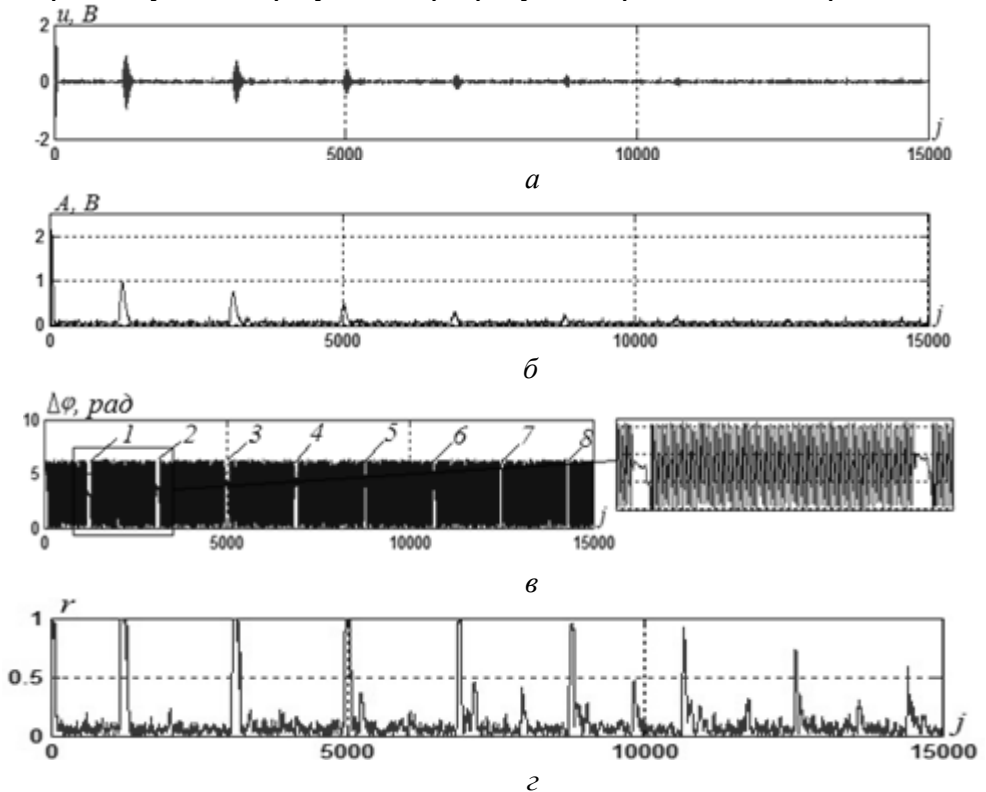


Рис. 5.4. Експериментальні та розрахункові дані отримані для зразка №1

На рис. 5.4 зображено: а) графік сигналу УЗТ; б) обвідна сигналу; в) фрагмент графіка різниці дискретних фазових характеристик сигналу УЗТ і сигналу-носія синусоїдної форми; г) графік значень статистики $r[j, M_w]$ для ковзного вікна з апертурою $M_w = 110$.

З рис. 5.4 а,б видно, що аналізований сигнал являє собою послідовність донних радіоімпульсів в суміші з гауссовим шумом, які загасають за експоненціальним законом. Графік на рис. 5.4,в є пилкоподібною функцією з областю значень $[0, 2\pi)$. На інтервалах часу, в межах яких донні імпульси присутні, графік набуває виду кривої, яка змінюється значно повільніше (ділянки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Співставний аналіз обвідної A (рис. 5.4, б) і статистики $r[j, M_w]$ (рис. 5.4, з) дозволяє зробити висновок, що запропонований метод фазової УЗТ є більш ефективним порівняно з амплітудним, оскільки забезпечує виявлення більшої кількості луна-сигналів тобто можливість їх виявлення за нижчого відношення сигнал/шум. Дійсно, за обвідною сигналу $u_d[j]$, починаючи з $i=5$, практично не можливо вирізнити луна-сигнали на фоні шуму. Натомість за графіком статистики $r[j, M_w]$ можна впевнено виявити вісім луна-сигналів ($d=8$, для восьмого маємо $U_{max8}/\sigma_{ш} \approx 1,8$).

З метою визначення середньоквадратичного відхилення (СКВ) оцінки часового інтервалу τ виконувалась серія $S = 20$ експериментів з подальшим усередненням отриманих оцінок.

Середнє значення $\bar{\tau}_{ks}$ для k -го інтервалу для S експериментів визначається за формулою $\bar{\tau}_{ks} = S^{-1} \sum_{s=1}^S \tau_{ks}$, де τ_{ks} – значення затримки між k і $k+1$ імпульсами в s -тому експерименті, $k = \overline{1, K}$; $s = \overline{1, S}$. СКВ для $\bar{\tau}_{ks}$ визначалось як

$$\sigma_{KS} = \sqrt{(S-1)^{-1} \sum_{n=1}^S (\tau_{ks} - \bar{\tau}_{ks})^2}.$$

Для об'єднання результатів серії окремих і незалежних вимірювань однієї величини необхідно використати середнє зважене значення цих вимірювань для отримання найкращої оцінки [49, 93]

$$\bar{\tau}_H = \sum_{k=1}^K \bar{\tau}_{ks} / \sigma_{KS}^2 \Big/ \sum_{k=1}^K \sigma_{KS}^{-2}. \quad (5.2)$$

СКВ цієї оцінки визначається як

$$\sigma_{\bar{\tau}_H} = \left(\sum_{k=1}^K \sigma_{KS}^{-2} \right)^{-0.5}. \quad (5.3)$$

На рис. 5.5 зображено значення $\bar{\tau}_{ks}$ і границі СКВ для $\bar{\tau}_{ks}$ і $\bar{\tau}_N$, отримані за статистикою $r(a)$ та обвідною сигналу (б). На графіках рис. 5.5 позначено: ромбами – значення $\bar{\tau}_{ks}$; трикутниками – границі СКВ для $\bar{\tau}_{ks}$; колами – границі СКВ для $\bar{\tau}$. З їх аналізу можна зробити висновок, що для відношень $c/\sigma \gg 1$ вищу точність вимірювання часових інтервалів забезпечує амплітудний метод. Зі зменшенням відношення c/σ фазовий спосіб

вимірювання стає більш ефективним, а для значень $c/\pi < 2$ амплітудний метод взагалі втрачає здатність до визначення часових інтервалів (6-, 7-, 8-й луна-сигнали не виявляються за обвідною сигналу).

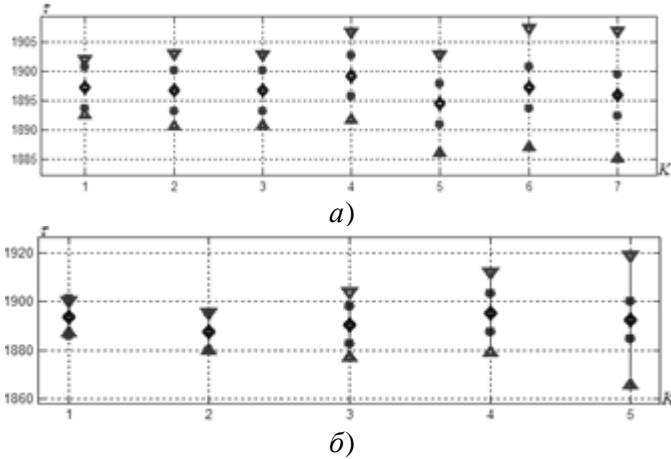


Рис. 5.5. Графіки середнього значення часу поширення сигналу $\bar{\tau}_{kS}$ і границі СКВ для $\bar{\tau}_{kS}$ та $\bar{\tau}$, отриманих за статистикою r (а) та за обвідною сигналу (б)

Зразок №2. Частота сигналу заповнення 2,23 МГц. Отримані експериментальні дані та результати обчислення представлені на рис. 5.6.

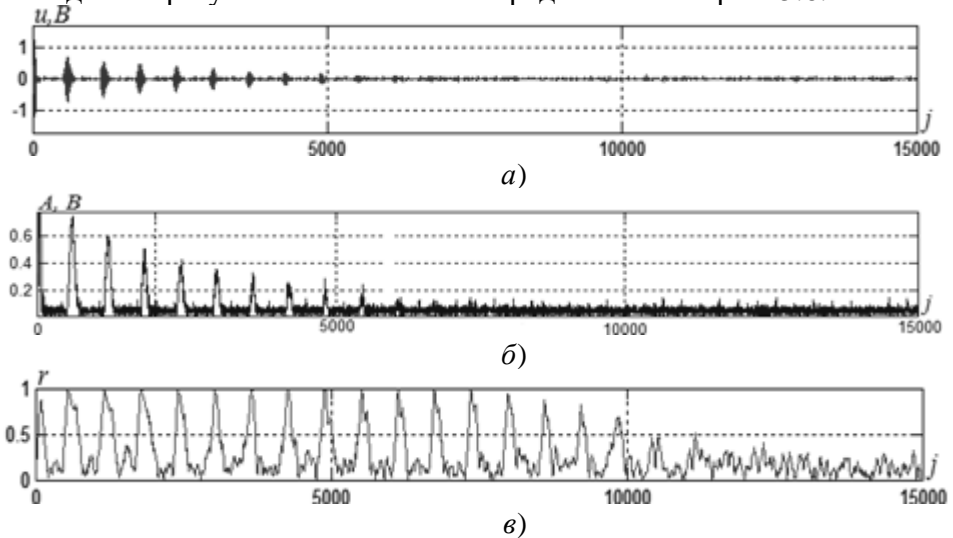


Рис. 5.6. Експериментальні данні для зразка №2: а – графік сигналу $u_d[j]$; б) графік обвідної сигналу $A[j]$; в) графік статистики $r[j, M_w]$

В цьому експерименті обвідна сигналу $u_d[j]$ починаючи з $i=10$ практично не дозволяє вирізнити луна-сигнали на фоні шуму. Натомість графік статистики $r[j, M_w]$ свідчить про те, що в даному експерименті впевнено виявляються $d=18$ луна-сигналів. Для імпульсу з номером $i=8$ відношення с/ш становить ~ 1 .

Зразок №3. Частота сигналу заповнення 2,3 МГц. На рис. 5.7 представлено отримані дані.

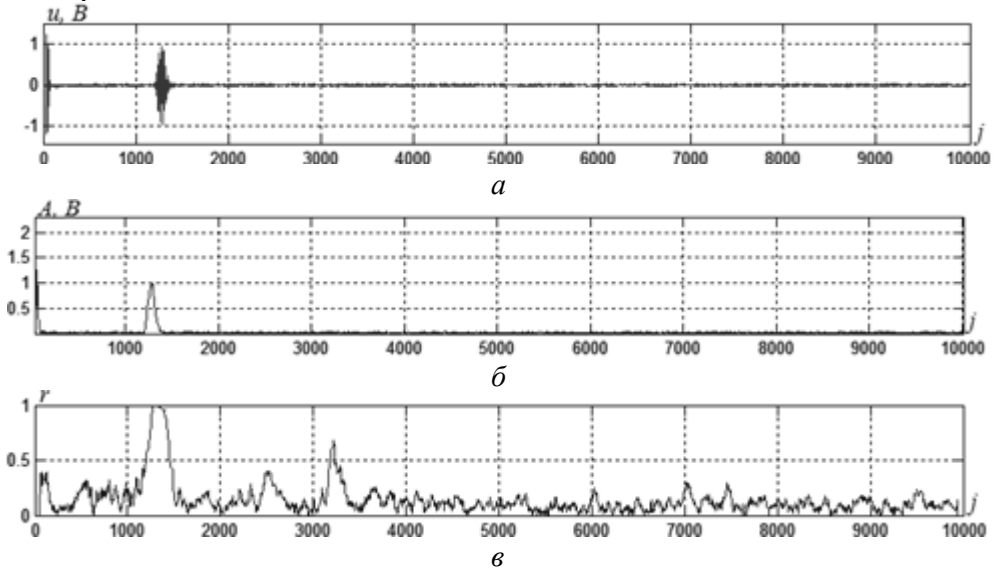


Рис. 5.7. Експериментальні дані для зразка №3: а) графік сигналу УЗТ; б) графік обвідної сигналу; в) графік статистики $r[j, M_w]$;

З рис. 5.7, а, б видно, що за обвідною сигналу визначається лише один луна-сигнал, натомість графік статистики $r[j, M_w]$ свідчить про можливість виявлення двох імпульсів.

Зразок №4. Частота сигналу заповнення 2,3 МГц. На рис. 5.8 представлено експериментальні та розрахункові дані.

З порівняння графіків обвідної сигналу і статистики $r[j, M_w]$ можна зробити висновок, що в цьому випадку фазовим методом впевнено виділяються 6 луна-сигналів, в той час як за амплітудним – 4-5 луна-сигналів. Відношення с/ш для останнього з виявлених луна-сигналів становить 2,3. Загалом фазовий метод виявлення сигналів УЗТ з гармонічним сигналом-носієм на фоні адитивної гауссової завади за відношення $c/\text{ш} < 2$ дає змогу

отримати в ході експериментів більший обсяг вимірювальної інформації порівняно з амплітудним методом і підвищити на цій основі точність вимірювання товщини виробів ультразвуковим луна-імпульсним методом.

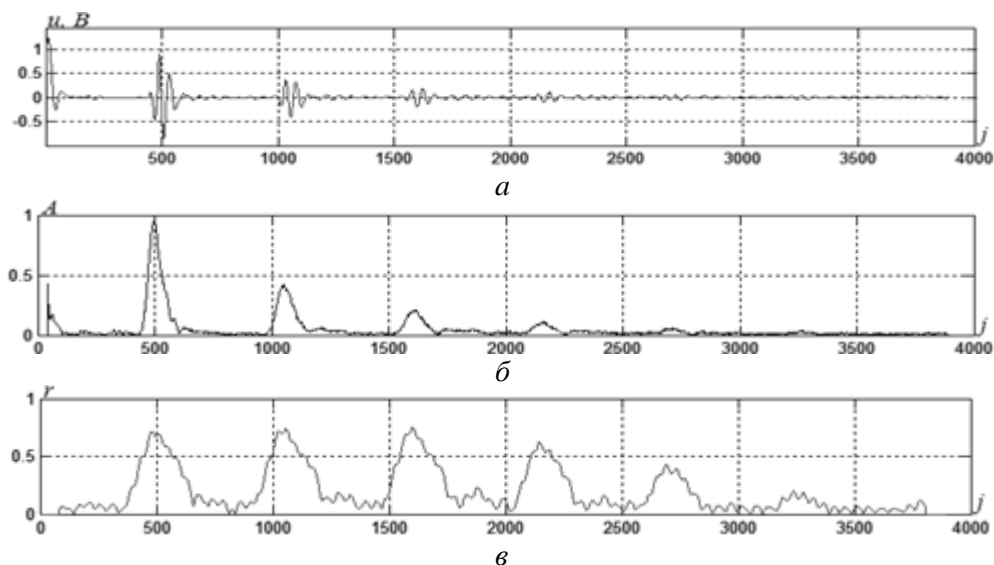


Рис. 5.8. Експериментальні данні для зразка №4: а) графік сигналу $u_d[j]$; б) графік обвідної сигналу $A[j]$; в) графік статистики $r[j, M_w]$

Розглянутий метод також може знайти застосування в ультразвуковій дефектометрії в завданнях виявлення дефектів типу порушення суцільності зі зменшеними розмірами.

5.2. Багатошкальні фазові вимірювання на основі числових систем залишкових класів

Фазовий метод вимірювання ґрунтується на використанні принаймні однієї пари гармонічних сигналів з фазовим зсувом φ між ними як інформативним параметром. Зазвичай цей параметр зв'язаний з вимірюваною фізичною величиною $L \in [0, L_{\max}]$, де L_{\max} – максимальне вимірюване значення, залежністю виду

$$\varphi(L) \equiv kF(L) \bmod 2\pi, \quad (5.4)$$

де $F(L)$ – деяка функція від L , k – розмірний коефіцієнт. Для прикладу, в завданні вимірювання відстані фазовим методом [53, 71] цей коефіцієнт дорівнює $k = 2\pi/\lambda$, де λ – довжина хвилі у середовищі її поширення вздовж

відстані L , а $F(L) = L$. В цьому випадку $\varphi(L)$ є порівнянним з kL за модулем 2π , що визначає нелінійний характер перетворення (1) у значному динамічному діапазоні.

В цілому гомоморфне, за умови $kF(L) \geq 2\pi$, перетворення (6.4) приводить до неоднозначності вимірювання. Ефективна реалізація фазового методу передбачає необхідність однозначного визначення фазових зсувів сигналів виду $\Phi(L) = kF(L) = 2\pi n(L) + \varphi(L)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Таке завдання відоме як розв'язання (усунення, розрізнення, стикування шкал) фазової неоднозначності і має розв'язки, які ґрунтуються на додаткових $i=1, 2, \dots$ фазових вимірюваннях, наприклад на декількох нижчих частотах (тобто з меншими k_i і, відповідно, меншою точністю вимірювання L) [53, 71]. В цьому випадку вимірювання на кожній з частот утворює свою шкалу з відповідним коефіцієнтом перетворення, а методи подолання багатозначності зводяться до послідовного перерахунку результатів вимірювань з однієї шкали в іншу (у разі, якщо для однієї зі шкал виконується умова однозначності: $k_i F(L_{\max}) < 2\pi$), або на переборі всіх можливих значень n (за суттєвого обмеження n , що має місце у фазових пеленгаторах [20]) і виборі найбільш імовірного за певним критерієм значення.

В той же час існує інша можливість визначення n , яка ґрунтується на використанні особливостей числової системи залишкових класів (СЗК) [1, 134]. Ця ідея ґрунтується на подібності модульного представлення фазових зсувів сигналів (1) та подання цілих чисел A в СЗК лишками виду $a_i \equiv A \bmod p_i$, де цілі числа $p_i > 1$ – модулі СЗК.

Найбільш активно теорія СЗК розроблялась і використовувалась у галузі обчислювальної техніки для побудови відмовостійких швидкодіючих засобів обчислень [1, 13]. В роботі [9] запропоновано використання СЗК для опрацювання інтерферограм у оптиці. Автори запропонували використання цієї ідеї для усунення багатозначності у фазових далекомірах та фазових пеленгаторах [43, 45, 49].

Визначення та особливості СЗК. Сутність СЗК полягає у поданні чисел A з робочого інтервалу $[0, A_p)$ множиною невід'ємних залишків $A_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Цілі числа $a_i, i = \overline{1, m}$ утворюються від ділення A на інші цілі взаємно прості числа $p_i, i = \overline{1, m}$ – модулі СЗК, тобто $a_i \equiv A \bmod p_i$. Множина всіх залишків за кожним модулем утворює кільце цілих чисел $\alpha_i \in [0, p_i)$ за відповідним модулем.

Відновлення чисел A у позиційній системі числення з $A_{\text{СЗК}}$ ґрунтується на китайській теоремі про залишки [56]: відновлення A можливе у випадку взаємоднозначної відповідності A та $A_{\text{СЗК}}$, що досягається виконанням наступних умов: 1) модулі системи є взаємно простими числами; 2) максимальне відновлюване число задовольняє нерівність $A_{\text{max}} < A_p = \prod_{i=1}^m p_i$. За виконання цих умов існує обернене перетворення $A_{\text{СЗК}} \Rightarrow A$. Число A може бути обчислене, наприклад, за алгоритмом

$$A = \sum_{i=1}^m a_i B_i \pmod{A_p}, \quad (5.5)$$

де $(B_1, \dots, B_i, \dots, B_m)$ – система ортонормованих базисів, яка обчислюється для вибраних модулів СЗК, наприклад, за викладеною в [1] методикою.

Приклад 5.1. Нехай число $A=31$ представлено в СЗК за системою модулів $(5, 7)$: $A_{\text{СЗК}} = (1, 3)$. Число A задовольняє умову $A \leq A_{\text{max}} = 34$; система ортонормованих базисів дорівнює $B = (21, 15)$. Умова ортонормованості полягає у виконанні для елементів базису сукупності співвідношень:

$$B_1 \bmod p_1 = 21 \bmod 5 = 1, \quad B_1 \bmod p_2 = 21 \bmod 7 = 0,$$

$$B_2 \bmod p_1 = 15 \bmod 5 = 0, \quad B_2 \bmod p_2 = 15 \bmod 7 = 1.$$

Результат обчислення за (2) дає значення:
 $A = (1 \cdot 21 + 3 \cdot 15) \bmod (5 \cdot 7) = 66 \bmod 35 = 31$.

Основні теореми та твердження про СЗК наведені в [1, 134]. Для обґрунтування використання СЗК у фазометрії важливе значення відіграє наступне твердження.

Твердження 1. Якщо число $A \in R$ і модуль $p_i \in N$ мають спільний множник $a \in N$, то

$$A \bmod p_i = a \left[\frac{A}{a} \bmod \left(\frac{p_i}{a} \right) \right]. \quad (5.6)$$

Твердження 1 дає формальні підстави виконувати модульні операції, по-перше, з дійсними числами, по-друге – з іменованими числовими значеннями фізичних величин. Нехай, для прикладу, фізична величини і її одиниця вимірювання мають числові значення A і p_i та розмірність $[A]$. Тоді на основі (3) маємо

$$\{A[A]\} \bmod \{p_i[A]\} = (A \bmod p_i)[A]. \quad (5.7)$$

З (6.6) випливає і інший важливий для практики вимірювання наслідок: якщо фізична величина змінюється за циклами, які чисельно визначаються не цілими числами, існує можливість звести модульні операції з такими величинами до операцій з цілими числами. Для прикладу розглянемо дробову частину повного фазового зсуву сигналів

$$[\Phi(L)] \bmod 2\pi = 2\pi[(\Phi(L)/2\pi) \bmod 1] \text{ [рад]}. \quad (5.8)$$

З метою оптимізації обчислювальних витрат інколи необхідно визначити залишок $\alpha_i = A \bmod p_i$ з результатів обчислень за іншим модулем p_j .

Такий перерахунок згідно з (3) виконується як

$$\alpha_i = A \bmod p_i = \frac{p_i}{p_j} \left(\frac{Ap_j}{p_i} \bmod p_j \right). \quad (5.9)$$

Якщо, для прикладу, вибрати $p_j = 2^g$, то залишок α_i утворюватиметься автоматично в результаті виконання операцій Ap_j/p_i у разі обмеження розрядної сітки обчислювача g двійковими розрядами.

Важливою особливістю СЗК є можливість організації контролю (і навіть виправлення) помилок, що виникають під час отримання залишків і виконання арифметичних операцій з ними. Для цього основу СЗК доповнюють додатковим модулем $p_{m+1} > p_i$, $i \in \overline{1, m}$ (одним чи декількома). Нова СЗК має повний діапазон перетворення чисел $[0, A_{\Pi})$, $A_{\Pi} = p_1 \dots p_m p_{(m+1)} = A_p p_{m+1}$. Систему модулів $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_{m+1})$, яка задовольняє умову $p_1 < p_2 < \dots < p_{m+1}$, називають *упорядкованою*, а представлення $A_{\text{СЗК}, i} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{m+1})$, отримане з $A_{\text{СЗК}}$ вилученням залишку α_i , називають *проекцією* числа A за модулем p_i . Довільну помилку в одному залишку $A_{\text{СЗК}}$ називають *однократною*, у двох залишках – *двократною*, в декількох – *багатократною*. Виявлення помилок у $A_{\text{СЗК}}$ обґрунтовується наступним твердженням.

Твердження 2. Нехай модулі упорядкованої СЗК $p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}$ є взаємно простими числами і нехай $A_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$ – правильне число. Тоді число $\tilde{A}_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \tilde{\alpha}_k \neq \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$ зі спотвореним залишком $\tilde{\alpha}_k$ – неправильне число.

Отже довільне спотворення одного із залишків, якими представляється число $A < A_p$ в СЗК, переводить його у разі відновлення в позиційній системі в інтервал $[A_p, A_n)$. Процес переходу в повний діапазон неправильного числа зі спотворенням одного залишку і повернення числа в робочий діапазон після виправлення залишку показано на рис. 5.9.

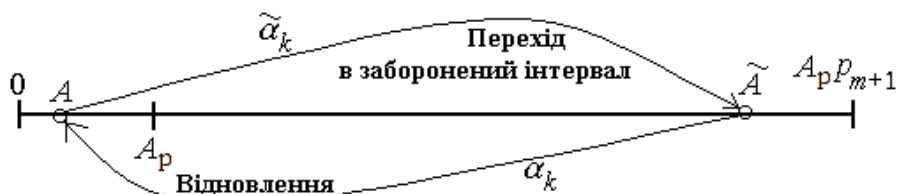


Рис. 5.9. Ілюстрація процесу спотворення і відновлення цілого числа A

Спотворення будь-якого залишку в новому представленні (a_1, \dots, a_{m+1}) приводить до того, що відновлене число $\tilde{A} = \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i B_i' \right) (\text{mod } A_n)$, де $(B_1', \dots, B_i', \dots, B_{m+1}')$ – нова система ортонормованих базисів, переходить з робочого діапазону $[0, A_p)$ (з діапазону т.з. правильних чисел) в діапазон $[A_p, A_p p_{m+1})$, що є ознакою помилки.

Твердження 2 дає теоретичне підґрунтя для виявлення і виправлення помилок в даних, поданих кодами СЗК. Критерієм відсутності помилки в $A_{\text{СЗК}}$ є виконання умови

$$A = \left[\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i B_i \right] (\text{mod } A_n) < A_p. \quad (5.10)$$

Перевірку неушкодженості $A_{\text{СЗК}}$ можна виконати і в інший спосіб – шляхом порівняння різних проєкцій відновленого числа. За даними [1] введення лише одного додаткового модуля $p_{m+1} > p_m$ дозволяє виявляти всі однократні помилки і близько 95% двократних помилок.

Твердження 3. Нехай в СЗК з упорядкованими модулями $p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}$, які є взаємно простими числами, задано правильне число $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$. Відновлені за проєкціями $A_{\text{СЗК}, i}$ за різними основами СЗК числа $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{m+1}$ збігаються, тобто

$$A_1 = A_2 = \dots = A_i = \dots = A_{m+1} = A. \quad (5.11)$$

Якщо $A > A_p$, а проекція $A_i < A_p$, це свідчить про наявність помилки в i -му залишку. Корекція виявлених помилок потребує додаткових обчислень і може бути виконана за наведеними в [1, 49] методами.

Застосування СЗК для вимірювання відстані у фазових далекомірах. Нехай гармонічний сигнал (наприклад, електромагнітної природи) поширюється вздовж відстані D в прямому та зворотному напрямках, що приводить до фазового зсуву сигналів $\Phi(D) = 4\pi D\lambda^{-1}$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \sin(2\pi ft), \quad t \in [0, T_c]; \\ u_2(t, x) &= U_2 \sin[2\pi ft - \Phi(D)], \quad t \in [0, T_c], \end{aligned} \quad (5.12)$$

де T_c, f – відповідно час спостереження та частота сигналу.

Доступним вимірюванню є фазовий зсув

$$\varphi(D) \equiv \Phi(D) \bmod 2\pi \equiv 4\pi D\lambda_i^{-1} \bmod 2\pi. \quad (5.13)$$

Нехай визначається незмінна на інтервалі часу спостереження T_c відстань $D \in (0, D_{\max})$ з дискретним кроком d_0 . Організуємо вимірювання фазових зсувів сигналів (9) на m частотах $\{f_i, i = \overline{1, m}\}$ з довжинами хвиль $\lambda_i \ll D_{\max}$ наступним чином. Робочі частоти виберемо кратними взаємно простим числам $p_i, i = \overline{1, m}$

$$f_i = v/p_i d_0 = v/\lambda_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.14)$$

де v – швидкість поширення хвиль у середовищі.

Множина гармонічних сигналів з частотами (5.14) є множиною з ортогональними компонентами на часовому інтервалі $T_{\text{опт}} = d_0/v \prod_{i=1}^m p_i$, що дозволяє застосовувати полігармонічний сигнал і виконувати фазові вимірювання одночасно на всіх частотах.

Результатом вимірювання є вектор фазових зсувів сигналів $\overline{\varphi_m} = (\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_m)$; для кожного $\varphi_i(D)$ має місце порівняння: $\varphi_i(D) \equiv 4\pi D\lambda_i^{-1} \pmod{2\pi}$. Вектор $\overline{\varphi_m}$ однозначно визначає відстань D .

Порівняння (5.13) згідно з (5.6) представимо наступним чином:

$$\frac{\varphi_i(D)}{2\pi} p_i \equiv \frac{2D}{\lambda_i} p_i \pmod{p_i}. \quad (5.15)$$

Виберемо дискретний крок вимірювання фазових зсувів сигналів

$$\Delta\varphi_i = 2\pi/p_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.16)$$

Тоді порівняння (6.15) можна переписати як

$$\frac{\varphi_i(D)}{\Delta\varphi_i} \equiv \frac{2D}{d_0} \pmod{p_i}. \quad (5.17)$$

Взявши до уваги лише цілі частини порівняння (5.17) маємо залишки

$$\alpha_i(D) = [\varphi_i(D)/\Delta\varphi_i]^+. \quad (5.18)$$

Вибір значень $\Delta\varphi_i$ і процесу визначення залишків $\alpha_i(D)$ для системи модулів (5, 7) ілюструє рис. 5.10, для якого $A=24$, $A_{СЗК}=(4, 3)$.

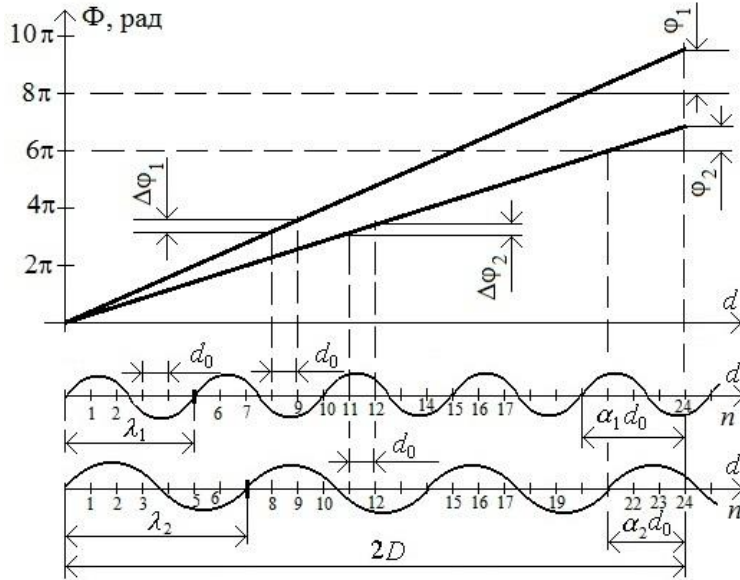


Рис. 5.10. Графічна ілюстрація процесу представлення результатів вимірювання фазових зсувів сигналів (відстані) цілими числами в СЗК з модулями (5, 7)

Визначені на всіх $i = \overline{1, m}$ частотах залишки дають змогу скласти систему порівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1(D) \equiv A(D) \pmod{p_1}, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_i(D) \equiv A(D) \pmod{p_i}, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_m(D) \equiv A(D) \pmod{p_m}. \end{cases} \quad (5.19)$$

В (5.19) число $A(D)$ дорівнює кількості відрізків довжиною $0,5d_0$, що

вкладається на вимірюваній відстані, а $\alpha_i(D)$ – залишки $A(D)$ за модулями p_i , $i = \overline{1, m}$. Таким чином, накладені на вибір частот та дискретність вимірювання фазових зсувів початкові умови (5.14) та (5.16) дозволяють подати числовий результат вимірювання $A(D)$ залишками цього числа за системою модулів $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_m)$ і звести розв’язання неоднозначності фазових вимірювань до завдання відновлення числа $A(D)$ з $A(D)_{\text{СЗК}} = (\alpha_1(D), \dots, \alpha_i(D), \dots, \alpha_m(D))$.

За належного вибору p_i та m результат вимірювання відстані

$$D = \frac{d_0}{2} \left[\sum_{i=1}^m \left[\frac{\Phi_i(D)}{\Delta\Phi_i} \right]^+ B_i \right] \pmod{A_p}. \quad (5.20)$$

Таким чином, визначення відстані за виразом (6.20) подібне відновленню числа A за його поданням $A_{\text{СЗК}}$, а між даними СЗК та параметрами сигналів існує відповідність:

$$n_i \Rightarrow f_i, \quad a_i \Rightarrow \Phi_i, \quad A \Rightarrow \Phi \quad (5.21)$$

Приклад 5.2. Вимірюється відстань 1955,1 м з кроком 1 м ($D=1955,1$ м, $d_0=1$ м), модулі СЗК: $p_1=13, p_2=17, p_3=19$. Використовуються електромагнітні хвилі ($v=3 \cdot 10^8$ м/с).

Робочий діапазон СЗК становить: $A_p = p_1 p_2 p_3 = 13 \cdot 17 \cdot 19 = 4199$.

Перевірка умови однозначного вимірювання відстані – $D < D_{\text{max}}$, дає результат:

$$D_{\text{max}} = 0,5 d_0 A_{\text{max}} = 0,5 \cdot 4198 = 2099 \text{ м} > D.$$

Розрахунок частот згідно з (11) дає значення:

$$f_1 \approx 23,077 \text{ МГц}, \quad f_2 \approx 17,647 \text{ МГц}, \quad f_3 \approx 15,789 \text{ МГц}.$$

Ортонормовані базиси для обраної системи модулів СЗК:

$$B_1 = 1938, \quad B_2 = 494, \quad B_3 = 1768.$$

Перевірка умови правильності визначення базисів:

$$\left[\sum_{j=1}^3 B_j \right] \pmod{A_p} = [1938 + 494 + 1768] \pmod{4199} = [4200] \pmod{4199} = 1.$$

Розрахунки вихідних даних – $\Delta\Phi_i$ отриманих за (5.16) і $\Phi_i(D)$ (5.13), зведені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2.

Параметри	f_1	f_2	f_3
$\Delta\varphi_i$, рад	0.4833	0.3696	0.3307
$\varphi_i(D)$, рад	4.9361	0.0691	4.9876

На етапі опрацювання даних спочатку визначаються залишки $\alpha_i(D)$ (5.18), що (за відсутності похибок вимірювань) дає такі числа:

$$\alpha_1(D) = 10, \quad \alpha_2(D) = 0, \quad \alpha_3(D) = 15.$$

Результат вимірювання відстані згідно з (5.20) формується як $D = 0,5 \cdot [10 \cdot 1938 + 0 \cdot 494 + 15 \cdot 1768] (\bmod 4199) = 0,5 \cdot 45900 (\bmod 4199) = 1955$ м.

Фазовий метод дозволяє виконати уточнення результату, отриманого в межах одного кроку. Слід зазначити, що модульна арифметика потребує безпомилкових вихідних даних для правильного відновлення чисел. Навіть незначні похибки вимірювання фазових зсувів сигналів здатні привести до спотворення кінцевого результату. Тому обчислення доцільно проводити в розширеній СЗК із застосуванням методів виявлення/корекції помилок.

Застосування СЗК для визначення азимуту у фазовому пеленгаторі. Фазові радіопеленгатори [10] призначені для визначення пеленга – кута між напрямком на джерело радіосигналів з гармонічною несучою і однією з площин, прийнятою за початок відліку кутових координат. У авіаційній і морській навігації під пеленгом розуміють азимут. Принцип дії радіопеленгаторів ґрунтується на тому факті, що нормаль до фазового фронту плоскої хвилі, поширюваної в однорідному середовищі, співпадає у просторі з напрямком на джерело випромінювання. Інформацію стосовно орієнтації фазового фронту хвилі у просторі отримують за результатами вимірювання та аналізу фазових зсувів сигналів, які приймаються рознесеними у просторі елементами лінійних антен (рис. 5.11).

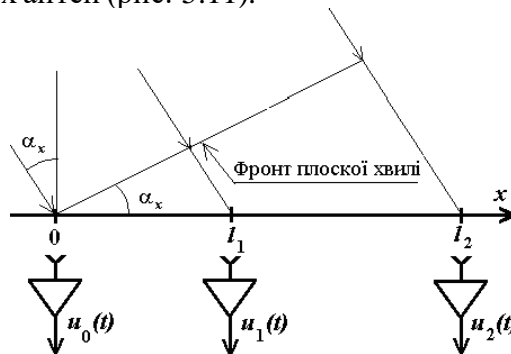


Рис. 5.11. Схема приймання сигналу рознесеними у просторі елементами антени пеленгатора

Останні повинні мати широкі діаграмами напрямленості та ідентичні фазочастотні характеристики. Для підвищення точності визначення пеленга в широкому діапазоні значень використовують антенні системи з декількома базами та збільшують величини баз (під базою розуміється відстань між фазовими центрами антен).

Прийняті сигнали мають вид

$$u(t, \alpha_x, l_i) = U_i \cos[2\pi f t - \varphi_i(\alpha_x, l_i)], \quad t \in [0, T_c], \quad (5.22)$$

де $U_i, f, \varphi_i(\alpha_x, l_i)$ – відповідно амплітуда, частота і початкова фаза сигналу на виході i -того елемента антени ($i=0, 1, 2$), $\varphi_{1,2} \in [0, 2\pi)$, $\varphi_0 = 0$; l_i – i -та база антени; T_c – час спостереження сигналу, $T_c > 1/f$, α_x – вимірюваний азимут.

Елементи лінійної антени у двобазовому фазовому пеленгаторі (рис. 5.11) рознесені у просторі відносно опорного елемента (з індексом $i=0$) на відстані l_1, l_2 . Вважається, що відстань від антени до джерела сигналу набагато більша за l_2 , що дозволяє рахувати хвилю плоскою, $l_1 = p_1 \Delta l$, $l_2 = p_2 \Delta l$, де Δl – квант баз антени, p_1, p_2 – цілі числа.

Затримка сигналів, що надходять на перший і другий елементи антени відносно нульового становить

$$\tau_i(\alpha_x, l_i) = l_i \sin \alpha_x / v, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (5.23)$$

Повні фазові зсуви сигналів між нульовим та i -тим ($i=1, 2$) елементами антени аналітично визначаються як

$$\varphi_i(\alpha_x, l_i) = 2\pi l_i \lambda^{-1} \sin \alpha_x, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (5.24)$$

а їх доступні однозначному вимірюванню частини в межах $[0, 2\pi)$

$$\varphi_i(\alpha_x, l_i) = 2\pi \Delta l p_i \lambda^{-1} \sin \alpha_x \pmod{2\pi}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (5.25)$$

Модульний характер залежності $\varphi_i(\alpha_x, l_i)$ від азимуту обумовлює можливість усунення багатозначності вимірювань α_x на основі застосування модулярної арифметики.

Отримаємо умови, за яких задача усунення багатозначності вимірювань α_x у фазовому пеленгаторі зводиться до задачі відновлення цілого числа з його представлення в СЗК.

Твердження 4. Для того, щоби результати вимірювання у двобазовому фазовому пеленгаторі, у випадку однопроменевого поширення гармонічного сигналу від одного джерела випромінювання, можна було представити

залишками в СЗК з модулями (p_1, p_2) необхідно виконання наступних умов:

- 1) базиси пеленгатора повинні бути кратними числам (p_1, p_2) ;
- 2) кванти вимірювання фазових зсувів сигналів в каналах пеленгатора повинні обиратись з умови: $\Delta\varphi_{1(2)} = 2\pi/p_{2(1)}$.

Це твердження не важко довести. Позначимо довжину хвилі у середовищі поширення сигналу λ , а бази пеленгатора – $l_1 = p_1\Delta l$, $l_2 = p_2\Delta l$. Нехай хвиля приходить на пеленгатор під кутом α_x . Вимірювання фазових зсувів в інтервалі $[0, 2\pi)$ в каналах пеленгатора відбувається без похибок. Повний фазовий зсув в каналах пеленгатора визначається за виразом (6.24).

Для представлення даних пеленгатора в СЗК необхідно забезпечити рівність квантів кута на різних базах. Ця умова трансформується в умову вибору різних квантів вимірювання відстані, яку проходить сигнал у різних каналах пеленгатора. Виходячи з логіки представлення даних в СЗК та з метою узгодження модульних операцій з визначення залишків та довжини хвилі λ необхідно виконати умови

$$\lambda = \lambda_0 p_1 q_1, \quad \lambda = \lambda_0 p_2 q_2, \quad (5.26)$$

де λ_0 – доля довжини хвилі, $q_1, q_2, p_1, p_2 \in N$. З (5.26) витікає, що $p_1 q_1 = p_2 q_2$. Перетворити цю рівність на тотожність можна поклавши $q_1 = p_2$, $q_2 = p_1$, тоді $\lambda_0 = \lambda/p_1 p_2$. Отже квантування відстаней для різних баз необхідно виконати з кроками

$$\Delta\lambda_1 = \lambda/p_2, \quad \Delta\lambda_2 = \lambda/p_1. \quad (5.27)$$

Квантуванням відстані $l_{1(2)} \sin \alpha_x$ квантами (5.27) отримують залишки

$$a_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) \equiv \left[\frac{l_{1(2)} \sin \alpha_x}{\Delta\lambda_{1(2)}} \right]^+ \bmod p_{2(1)} \equiv \left[\frac{\Delta l \sin \alpha_x}{\lambda_0} \right]^+ \bmod p_{2(1)}. \quad (5.28)$$

Використовуючи твердження 1 трансформуємо (5.28) до виду

$$a_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) \equiv \left[\frac{p_{2(1)}}{2\pi} \left(\frac{2\pi l_1 \sin \alpha_x}{\lambda} \bmod 2\pi \right) \right]^+. \quad (5.29)$$

З (5.29) маємо доступну вимірюванню частину $\Phi_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)})$

$$\begin{aligned} 2\pi a_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)})/p_{2(1)} &= \varphi_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) = \\ &= (2\pi l_{1(2)} \lambda^{-1} \sin \alpha_x) \bmod 2\pi = \Phi_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) \bmod 2\pi, \end{aligned} \quad (5.30)$$

що і треба було довести.

Враховуючи вищенаведене направляючий синус, з похибкою до кванту фазового зсуву, обчислюється як

$$\sin \alpha_x = A\lambda / \Delta l p_1 p_2^2 = \lambda \left(\sum_{i=1}^2 a_i(\alpha_x, l_i) B_i \right) (\bmod A_p) / \Delta l p_1 p_2^2. \quad (5.31)$$

Рівняння (5.31) дає однозначне в широкому секторі кутів значення азимуту, але зі значною похибкою квантування. Для підвищення точності визначення α_x за рахунок використання можливостей прецизійного вимірювання фазових зсувів сигналів, в (5.31) замість числа A необхідно підставити його уточнене (з дробовою частиною) значення

$$\begin{aligned} A_T &= (\alpha_1(\alpha_x, l_1) B_1 + \alpha_2(\alpha_x, l_2) B_2) \bmod A_p - \\ &- \left[\frac{p_1}{2\pi} \left(\frac{2\pi \Delta l \sin \alpha_x}{\lambda} \right) \bmod 2\pi \right]^+ + \frac{p_1}{2\pi} \left(\frac{2\pi \Delta l \sin \alpha_x}{\lambda} \right) \bmod 2\pi. \end{aligned} \quad (5.32)$$

З урахуванням (5.31) і (5.32) значення азимуту обчислюється як

$$\alpha_x = \arcsin(A_T \lambda / \Delta l p_1 p_2). \quad (5.33)$$

Сектор однозначного визначення азимуту обмежений кутом

$$\alpha_{x,\max} = \arcsin(A_{\max} \lambda / \Delta l p_1 p_2). \quad (5.34)$$

Приклад 5.3. Нехай плоска гармонічна електромагнітна хвиля надходить на двобазову лінійну антену (рис. 5.11) під кутом $\alpha_x = 60,75^\circ$. Задамо відношення $\Delta l / \lambda = 1,1$, і нехай бази антени відносяться як $l_1 / l_2 = 11/13$. Необхідно визначити азимут α_x за результатами вимірювання фазових зсувів сигналів пеленгатора, застосовуючи для усунення фазової багатозначності СЗК. Похибка вимірювання фазових зсувів сигналів відсутня.

Виходячи з вихідних даних приймемо $p_1 = 11$, $p_2 = 13$, отже $A_p = 11 \cdot 13 = 143$. Коректність поставленої задачі підтверджується виконанням умови $\alpha_x < \alpha_{x,\max}$:

$$\alpha_{x,\max} = \arcsin \left(\frac{11 \cdot 13 - 1}{11 \cdot 13 \cdot 1,1} \right) \cdot \frac{180}{\pi} \approx 64,2^\circ > \alpha_x = 60,75^\circ.$$

Розв'язання задачі виконано у два етапи. На першому підготовлено дані

для обчислень: ортонормований базис – $B_1 = 66$, $B_2 = 78$; обчислені за (21), (22) очікувані фазові зсувів сигналів зведені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Фазовий зсув	База l_1	База l_2
$\Phi_i(\alpha_x)$, рад	6,33628	78,3933
$\varphi_i(\alpha_x)$, рад	3,501	2,9951

На другому етапі за отриманими $\varphi_i(\alpha_x)$ визначається α_x .

Розрахунок залишків за виразом (5.30) дає наступний результат:

$$a_1(\alpha_x, l_1) = [13 \cdot 3,501 / 2\pi]^+ = 7, \quad a_2(\alpha_x, l_2) = [11 \cdot 2,9951 / 2\pi]^+ = 5.$$

Визначення числа A за (5.5) дає результат:

$$A = (7 \cdot 66 + 5 \cdot 78) \bmod(143) = 137,$$

а його уточнене за формулою (5.32) значення –

$$A_T = 137 - 5 + 5,2435 = 137,2435.$$

Азимут вираховується за (30)

$$\alpha_x = \arcsin\left(\frac{137,2435}{1,1 \cdot 11 \cdot 13}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 60,7499^\circ,$$

що відповідає вихідним даним прикладу.

В пеленгаторах на основі СЗК ознакою спотворення одного залишка є отримання результату з області комплексних чисел.

В табл. 5.4 подано порівняльний аналіз застосування СЗК для багатош-кальних фазових вимірювань у далекомірах та пеленгаторах.

Таблиця 5.4.

№	Характеристика	Фазовий далекомір	Фазовий пеленгатор
1	Вимірюваний параметр L , одиниця вимірювання	Відстань, метр	Площинний кут, радіан
2	Характер залежності $\varphi(L)$	Лінійна	Нелінійна
3	Кількість робочих частот	m	1
4	Кількість вимірювальних каналів	1	$m + 1$
5	Орієнтовна кількість цілих фазових циклів n , що визначається однозначно	$\sim 100 \dots 1000$	$\sim 10 \dots 40$
6	Необхідна кількість модулів СЗК	3...7	2...4

Таким чином доведена можливість представлення даних вимірювань у фазових далекомірах і пеленгаторах в СЗК і розв'язання на цій основі багатозначності фазових вимірювань. Поєднання СЗК та фазового методу

вимірювання забезпечує останньому унікальну властивість – можливість виявлення і виправлення грубих помилок вимірювання. Пошук спотворених лишків і їх виключення/виправлення реалізуються шляхом збільшення елементів антени (у пеленгаторі) чи робочих частот (у далекомірі) і ускладненням алгоритму опрацювання даних вимірювань. Це сприяє збереженню працездатності таких засобів вимірювання в умовах значного зменшення відношення сигнал/шум.

5.3. Статистичне опрацювання даних в системах моніторингу параметрів довкілля на базі безпілотних авіаційних комплексів

Для вирішення прикладних задач контролю параметрів довкілля особливо важливим є [4] :

- оцінка просторового розподілу шкідливих викидів з метою визначення найбільш імовірних напрямків їх поширення з прив'язкою до географічних координат;

- порівняльний аналіз розвитку у просторі та часі негативних процесів техногенного характеру;

- аналіз процесів надходження, накопичення та поширення шкідливих речовин від джерел забруднення з урахуванням ландшафтних та фізико-географічних особливостей місцевості розташування джерел забруднення;

- прогнозування найбільш ймовірних сценаріїв розвитку процесів впливу шкідливих речовин на довкілля.

Вирішення цих питань дозволяє створювати нові і удосконалювати існуючі моделі поширення впливу шкідливих викидів, техногенних інцидентів та катастроф і приймати обґрунтовані управлінські рішення з метою мінімізації наслідків аварій.

Отримання вимірювальної інформації для вирішення таких завдань доцільно виконувати за допомогою комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем (KIBC) на базі безпілотних авіаційних комплексів (БАК). Така реалізація апаратної складової системи контролю довкілля дозволяє: зберігати працездатність системи в широкому діапазоні змін метеорологічних умов, пори року та доби; вести хімічну та радіаційну розвідки; оперативно переналаштовувати систему на контроль різних шкідливих речовин; змінювати відповідно до завдання перелік точок чи трас контролю; встановлювати, за наявності підсистеми контролю поточного часу, причинно-наслідкові зв'язки між різними подіями в зоні контролю; контролювати параметри та характеристики довкілля в небезпечних для людини умовах; розробляти та уточнювати моделі процесів атмосферного перенесення радіонуклідів та інших шкідливих речовин і їх осадження на земну поверхню для оцінювання та прогнозування забруднення довкілля шкідливими викидами з об'єктів енергетики; отримувати надійні експериментальні дані.

В КІВС на базі БАК, як правило, передбачається переміщення датчиків у просторі в районі джерел забруднення по певним замкненим траєкторіям. Останні можуть змінюватись внаслідок зміни рози вітрів, інших метеорологічних умов чи завдань контролю. Поточне положення безпілотного літального апарату (БПЛА) з сенсорами у просторі і часі періодично фіксується з достатньою точністю, наприклад, за допомогою системи GPS.

Отримана в такий спосіб первинна вимірювальна інформація, наприклад, потужність експозиційної дози чи рівень радіаційного фону, що визначається за допомогою лічильників Гейгера-Мюллера, може бути використана для побудови гістограм розподілу таких даних, полів градієнтів функцій, ліній однакових рівнів забруднення (ізолінії) простору різними шкідливими викидами тощо.

В процесі опрацювання первинних вимірювальних даних виникає інша важлива задача – їх аналіз в полярній системі координат, що дозволить вивчати та прогнозувати найбільш небезпечні напрямки поширення шкідливих викидів методами статистичного аналізу кутових спостережень [1, 49].

Розглянемо наступне завдання аналізу первинних даних контролю довкілля за допомогою КІВС на основі БАК. Нехай БПЛА рухається в околі об'єкта контролю на значній відстані від нього та незмінній висоті по замкненій траєкторії, яка є кривою другого порядку. Ця траєкторія охоплює джерело шкідливих викидів, розміри якого значно менші за розміри траєкторії. Це допускає розглядати джерело забруднення атмосфери як точкове, координати якого на поверхні землі (x_o, y_o) відомі. Дані сенсора – результати вимірювання параметра s отримують за умови регулярної, тобто періодичної в часі дискретизації з детермінованим періодом T_d , та з прив'язкою в часі і просторі, тобто як функцію $s(x, y, t, \bar{p})$, де \bar{p} – вектор метеопараметрів.

Необхідно побудувати круговий розподіл у просторі параметру s .

Розв'язання цієї вимірювальної задачі має певні особливості, характерні для кутових вимірювань. Для спрощення задачі вважатимемо умови проведення вимірювального експерименту незмінними (стаціонарними), що дозволяє розглядати результати експерименту як незалежні від аргументів t та \bar{p} .

Процес накопичення первинної вимірювальної інформації відбувається під час руху БАК вздовж замкненої траєкторії. Для прикладу на рис. 5.12 в декартовій системі координат xOy такою траєкторією є зовнішня крива 2. Початок системи координат $x_o = 0$, $y_o = 0$ прив'язаний до джерела викидів. На траєкторії польоту позначено множину точок

$(A, B, C, D, E, F, G, H, J)$ з відомими координатами, в яких відбувається визначення контрольованого параметру. На рисунку ці точки розподілені рівномірно по зовнішній кривій (тобто з однаковими відстанями між точками по траєкторії польоту), що за умови регулярної дискретизації можливе за відсутності вітру, тобто коли $V = 0$. Якщо спроектувати ці точки на коло радіуса R (крива 1), отримуємо множину нерівномірно розподілених по колу точок (на рисунку вони позначені зірочками). Така трансформація даних з кривої 2 на криву 1 в кожному окремому випадку повинна виконуватись з урахуванням координат точок на цих кривих та фізики формування полів шкідливих викидів чи випромінювань.

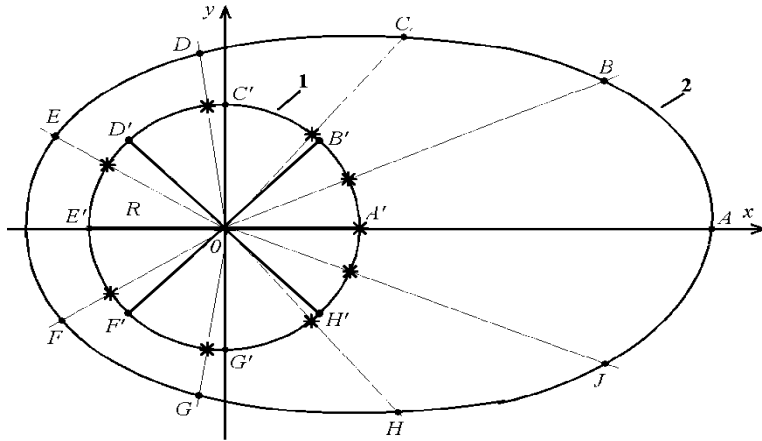


Рис. 5.12. Приклад відображення результатів спостережень з довільної кривої другого порядку (крива 2) на коло (крива 1)

За наявності вітру або інших дестабілізуючих метеофакторів кутова нерівномірність отримуваних експериментальних даних посилюватиметься. Така нерегулярність не є штучною, а природно виникає як наслідок способу отримання первинної вимірювальної інформації за допомогою БПЛА, тому принципово не може бути усунута вибором режиму її збирання.

Виконувати опрацювання даних вимірювань у випадку нерівномірної дискретизації на колі вкрай незручно. З огляду на це вбачається доцільним виконати прив'язку експериментальних даних до множини точок розбиття кола на рівні клас-інтервали. На рис. 6.12 такі точки позначені як $(A', B', C', D', E', F', G', H')$. Вони отримані шляхом розбиття центрального кута величиною 2π на вісім рівних клас-інтервалів завбільшки $\Delta\theta = \pi/4$. Значення параметру в цих точках можна отримати шляхом інтерполяції

розподілених нерівномірно по колу даних. В загальному випадку кількість клас-інтервалів може не співпадати з множиною точок на кривій 2.

За значного числа точок розбиття достатньо застосувати лінійну інтерполяцію. Об'єктивні умови проведення вимірювального експерименту можуть привести до зменшення кількості вузлів інтерполяції. До такого наслідку, наприклад, призводить відсутність каналу радіозв'язку. В цьому випадку вимірювальна інформація разом з відповідними просторовими координатами накопичується на борту БПЛА. За обмеженого обсягу ОЗУ та значного загального часу польоту це обумовлює необхідність збільшення інтервалу дискретизації і розв'язання задачі апроксимації представлених на колі розріджених даних. У разі зменшення точок розбиття і необхідності більш точного відтворення залежності $s(l)$ використовують інтерполяцію поліномами вищих порядків.

Приклад апроксимації даних і переходу від нерівномірної до рівномірної по куту дискретизації показано на рис. 5.13. На цьому рисунку коло радіуса R представлено розгорткою завдовжки $2\pi R$.

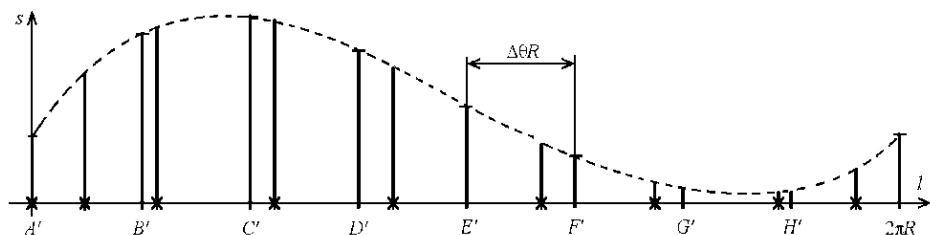


Рис. 5.13. Ілюстрація переходу до рівномірної на колі дискретизації даних шляхом інтерполяції нерівномірно дискретизованих вхідних даних

За отриманим в такий спосіб розподілом у просторі значень параметру s необхідно визначити кутові статистики, що оцінюють ймовірнісні характеристики кутового розподілу цього параметру в околі джерела викидів. Методологія опрацювання таких вимірювань в КІВС на основі БАК і отримання кутових статистик розподілу контрольованих величин у просторі представлена структурою алгоритму опрацювання експериментальних даних (рис. 5.14).

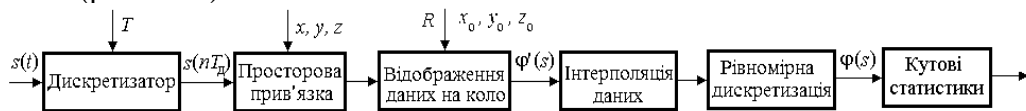


Рис. 5.14. Структура алгоритму формування та опрацювання кутових даних в КІВС на основі БАК

Розглянемо детальніше питання отримання кутових статистик розподілу у просторі параметра s . З цією метою представимо отримані дані в циліндричній системі координат (ρ, θ, s) . Значення параметру s відображаються ламаною (або кривою після інтерполяції експериментальних даних) на циліндричній поверхні, як це зображено на рис. 5.15. Для зручності вибрано радіус в основі циліндра $R = 1$, що не впливає на співвідношення кутів і отримувані кутові статистики. Таке спрощення полегшує аналіз, спрощує аналітичні результати і є загальноприйнятим в теорії статистичного аналізу кутових спостережень.

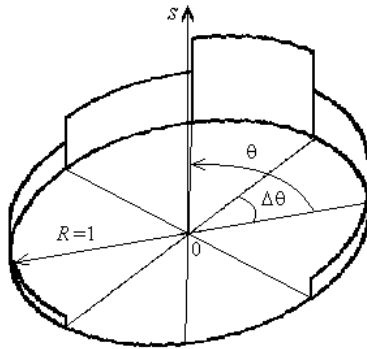


Рис. 5.15. Графічне представлення розподілу параметра $s(l)$ в циліндричній системі координат

Обґрунтуємо перехід від вибірки значень параметра $s[j]$, $j = \overline{1, m}$ до вибірки кутів наступним чином. Нехай за результатами попереднього оброблення отримали j клас-інтервалів з центрами в точках $\theta[j] = 2\pi(j - 0,5)/m$, $j = \overline{1, m}$. Для перенесення ймовірнісних властивостей параметра s на вибірку кутів необхідно вибрати частоту попадання кутів у j -тий клас-інтервал пропорційною відповідному відносному значенню

$$s^*[j] = \left[s[j] \left(\sum_{j=1}^m s[j] \right)^{-1} K \right]^+, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.35)$$

У виразі (5.35) значення $s^*[j]$ трактуються як кількість отриманих значень кута в j -тому клас-інтервалі. Для узгодження числових значень $s^*[j]$ з їх змістом та отримання цілочислових значень кількості $s^*[j]$ в формулу (5.35) введено безрозмірний коефіцієнт K та операцію виділення цілої частини числа. Чим більше K , тим менша похибка заокруглення. Доцільно обирати значення K таким, для якого похибка заокруглення не перевищуватиме $\sim 10^{-3}$, що

дозволяє нехтувати нею у порівнянні з відносною похибкою вимірювання контрольованого параметра. Величини $s^*[j]/K$, $j = \overline{1, m}$ – це стовпчики кругової гістограми, які відповідають емпіричним значенням щільності ймовірності вимірюваного параметра. Формула (5.35) отримана для ступінчастої інтерполяції розподілу параметра s . За інтерполяції поліномами вищих порядків значення частот можна отримати за формулою

$$s^*[j] = \left[K \int_{2\pi m^{-1}(j-1)}^{2\pi m^{-1}j} s(l) dl / \int_0^{2\pi} s(l) dl \right]^+, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.36)$$

За результатами такої трансформації маємо m множин кутів

$$\begin{aligned} &(\theta_1[1], \dots, \theta_{s^*[1]}[1]), \\ &\dots\dots\dots \\ &(\theta_1[j], \dots, \theta_{s^*[j]}[j]), \\ &\dots\dots\dots \\ &(\theta_1[m], \dots, \theta_{s^*[m]}[m]). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ці множини в сукупності утворюють статистику кутів Θ обсягу

$$M = \sum_{j=1}^m s^*[j]. \quad (5.38)$$

Для отриманої в такий спосіб статистики Θ визначають синус та косинус моменти n -того порядку відносно нульового напрямку

$$C_n = M^{-1} \sum_{j=1}^m s^*[j] \cos(n\theta[j]), \quad S_n = M^{-1} \sum_{j=1}^m s^*[j] \sin(n\theta[j]). \quad (5.39)$$

В формулах (5.39) важливим є застосування вагового оброблення кутів коефіцієнтами $s^*[j]$. Така процедура є суттєвою і забезпечує ймовірніше представлення розподілу в просторі різних фізичних величин єдиною безрозмірною кутовою мірою. Це дозволяє уніфікувати процес опрацювання різних фізичних величин, які отримані за даними польотної інформації БПЛА, та виконувати їх кутовий аналіз.

Через визначені синус- та косинус-моменти (5.39) статистики Θ можна оцінити інші, прийняті в теорії статистичного аналізу кутових спостережень вибірккові кругові характеристики: кругове середнє, довжину результуючого вектора, кругові дисперсію та стандартне відхилення, кругові медіану та моду та ін.

Розділ 6. МОДЕЛІ І МІРИ ДЛЯ БЕЗЕТАЛОННИХ ВИМІРЮВАНЬ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Віртуальну міру для оцінювання характеристик композитних матеріалів можна розглядати як образ сигналу або сигнального поля, отриманий з використанням імітаційної моделі, побудованої на основі апріорної інформації про закономірності зміни характеристик інформаційного сигналу при відповідній зміні стану досліджуваного об'єкта. Знання про характер змін інформаційних сигналів можуть бути отримані або експериментальним шляхом з використанням еталонних зразків (фізичних мір) або на основі математичного моделювання - побудови функціональної залежності зміни інформативної ознаки від зміни стану. Віртуальні міри дозволяють створювати бібліотеки образів інформаційних сигналів, що дає змогу відмовитись від матеріальних мір (стандартних зразків, що відтворюють стан об'єкта дослідження) при навчанні та налаштуванні діагностичних систем.

До методів створення віртуальних мір можна віднести здатність деяких нейромережових класифікаторів проводити кластерний аналіз і створювати нові класи або образи, які не відтворювалися як еталонні при навчанні.

Віртуальні міри дозволяють моделювати і ймовірносні міри у вигляді стохастичних спотворень інформаційних сигналів або сигнальних полів та різного роду шуму (наприклад шуму квантування при дослідженні характеристик вимірювальних систем, або структурного шуму, притаманного різного роду середовищам).

Створювання віртуальних мір дозволяє підійти до вирішення проблеми безеталонної діагностики, коли створення фізичних еталонів, що відтворюють різні типи дефектів і стани об'єкта дослідження ускладнене або неможливе.

6.1. Метод побудови віртуальних мір для інформаційних сигналів

Процес діагностування складних об'єктів характеризується великим впливом випадкових чинників, обумовлених змінами властивостей об'єктів, які виникають внаслідок складності процесів виготовлення, монтажу та експлуатації, великою кількістю типів можливих дефектів, які не піддаються формалізованому опису, недосконалістю методик контролю та діагностичного обладнання та іншими чинниками.

Достовірність контролю в такому разі визначається не тільки використаними фізичними методами отримання інформації про технічний стан об'єкту, але і математичними моделями, покладеними в основу методів діагностики,

та методами опрацювання інформації, з метою формування просторів діагностичних ознак і прийняття діагностичних рішень.

В задачах діагностики наявність адекватної моделі, за якою відбувається синтез інформаційних сигналів (віртуальних мір), характерних для об'єктів з різними ступенями пошкодженості або типами дефектів, має велике значення, оскільки дає змогу вирішити одночасно декілька задач. По-перше, існування такої моделі дозволяє побудувати множину віртуальних мір, які відповідають можливим станам об'єкта діагностування, а отже можуть бути використані для навчання та налаштування системи діагностики без фізичного виготовлення еталонних зразків. По-друге, модель інформаційних сигналів може використовуватись для вибору граничного значення чутливості діагностичних систем, оцінки їх дієздатності і коригування основних параметрів, для визначення достовірності контролю та класифікації тощо.

Розглянемо метод синтезу віртуальних мір з використанням математичної моделі, яка враховує детерміновану та випадкову складові характеристик реальних сигналів. Даний метод дозволяє виконувати синтез будь-якої необхідної кількості різноманітних інформаційних сигналів, що призводить до зменшення часових, технічних та економічних витрат пов'язаних з виготовленням еталонних зразків.

В діагностичних системах широкий клас інформаційних сигналів – це імпульсні або радіоімпульсні сигнали, які характеризуються не тільки амплітудою, тривалістю, частотою та фазою несучої, але і своєю формою. Наприклад, такі інформаційні сигнали притаманні акустичним, електромагнітним та іншим методам неруйнівного контролю. Зміна форми імпульсних сигналів в багатьох випадках є найбільш інформативною та завадостійкою характеристикою, тому доцільно розглянути побудову математичної моделі сигналу, яка дозволяє імітувати саме цю зміну.

Моделювання віртуальної міри у вигляді інформаційного сигналу в цілому, а не окремих його параметрів, дозволяє розробляти класифікатори, що оперують з усім набором характеристик сигналу і, тим самим, забезпечують побудову більш адекватних вирішальних правил діагностики.

Як приклад, для побудови імітаційної моделі використано інформаційні сигнали системи, що реалізує контроль композитних виробів та покриттів методом низькошвидкісного удару [25]. Досліджувані об'єкти - композитні панелі з пошкодженнями від ударів з різною кінетичною енергією від 2,3 кДж до 5,1 кДж.

Оскільки інформаційні сигнали характеризуються великою кількістю параметрів, врахування яких може суттєво ускладнити побудову імітаційної моделі, то одним з основних етапів є зменшення розмірності простору ознак,

тобто вибір найбільш інформативних параметрів, які мають максимальну чутливість до зміни властивостей об'єкта діагностування. Визначивши найбільш інформативні ознаки, шляхом їх зміни можна провести моделювання інформаційного сигналу з метою формування бібліотеки віртуальних еталонів для налаштування діагностичних систем, відпрацювання методик діагностування, перевірки достовірності роботи систем, їх валідації, тощо. Основними причинами для зменшення розмірності простора ознак є той факт, що використання при діагностиці ознак, на значення яких сильно впливає дія випадкових факторів, може призвести до зниження достовірності контролю та прийняття невірного рішення. Скорочення кількості ознак дозволяє зменшити обчислювальну складність та підвищити загальність класифікатора. Формального підходу до відбору таких ознак не існує. Однак щодо їх вибору, можна сформулювати загальні вимоги, такі як: придатність для вимірювання, інформативність та завадостійкість.

При вирішенні задачі оцінки інформативності ознак необхідно враховувати вплив випадкових факторів, таких як наявність завад у вимірювальних каналах, випадкових похибок датчиків, просторової неоднорідності об'єктів, тощо.

Таким чином з вектора ознак розмірності M , $A \in \{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$ необхідно вибрати найбільш інформативні, тобто отримати новий вектор ознак розмірності M' , $B \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M'-1}\}$ (множину ознак, які потрібно виділити в процесі селекції), причому $M' < M$. Тоді задача селекції фактично зводиться до відображення однієї множини в іншу: $A \rightarrow B$.

Запропонований спосіб – це спосіб виділення ознак, які характеризуються великими відстанями між класами і малими всередині класів.

Одним з методів відбору діагностичних ознак є дисперсійний аналіз. Він проводиться для оцінки ступеня зміни інформативної ознаки, під впливом певних змінних факторів (багатофакторний аналіз) або фактору (однофакторний аналіз). В загальному вигляді задача дисперсійного аналізу складається з того, щоб з загальної дисперсії виділити дисперсію, яка обумовлена впливом фактора (факторна дисперсія), та обумовлену дією неврахованих факторів (залишкова дисперсія) [28,79]. Тоді рівень впливу фактора визначається за коефіцієнтом значущості :

$$\beta_x = C_x / C_y, \quad (6.1)$$

де C_x – факторна дисперсія, C_y – загальна дисперсія.

Ступінь впливу фактора на зміну значення діагностичної ознаки визначається шляхом порівняння з певним пороговим рівнем $\beta_{\text{п}}$. Ознаки, які мають ве-

лику ступінь впливу фактора на зміну їх значень, формують результуючий вектор, який в подальшому може використовуватись в задачах діагностики та класифікації.

Оскільки будується імітаційна модель інформаційного сигналу в цілому, а не його окремих складових, доцільно використовувати його спектральне представлення. Застосування найбільш вживаного перетворення Фур'є ускладнює процедуру імітаційного моделювання, оскільки відображає масив дійсних чисел (дискрет інформаційного сигналу) в комплекснозначний масив. Тому для спектрального перетворення інформаційних сигналів доцільно застосовувати дискретні ортогональні функції Хартлі, Чебишева, Лагерра та інші, які дозволяють отримувати дійсні значення спектральних коефіцієнтів [11,61].

Спектри імпульсів, що розраховуються є загасаючими, це дозволило обмежити число аналізованих коефіцієнтів до перших n_1 , які мають понад 99% повної енергії досліджуваних інформаційних сигналів. Для розкладу в кожному базисі можна виділити сукупність коефіцієнтів, які відповідають двом вимогам: є найбільшими за величиною, порівняно з іншими, і дають змогу відділити значення коефіцієнтів спектрального розкладу, значення яких в значній мірі відрізняються для кожного класу.

Кількісно цей висновок можна обґрунтувати, використовуючи коефіцієнт отриманий з нерівності Бесселя, який характеризує енергетичний вклад перших n_1 складових розкладу в повну енергію інформаційного сигналу:

$$K_{n,n_1} = \sum_{j=0}^{n_1-1} |a_j|^2 / \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2, \quad (6.2)$$

де a_k – значення спектрального коефіцієнта, n – загальна кількість спектральних складових.

Таким чином, якщо вибрати n_1 перших коефіцієнтів розкладу за діагностичні ознаки, то вони будуть характеризувати складові розкладу, що вносять в енергію інформаційного сигналу найбільший вклад. Це також зменшує обчислювальні витрати та підвищує ефективність роботи з отриманими сигналами.

Частина коефіцієнтів розкладу більшою мірою підпорядковані впливу випадкових факторів, чим інші, тобто мають велику внутрішньогрупову дисперсію. Крім того, коефіцієнти спектрального розкладу по різному змінюються при зміні ступеня дефектності виробу, тобто мають різні значення факторної дисперсії. Враховувати всі отримані n_1 спектральні складові не має сенсу, оскільки це призводитиме до невиправданого ускладнення імітаційної моделі і відповідному збільшенню обчислювальних витрат.

Для отриманих значень коефіцієнтів розкладу $a_k, k = \overline{0, n_1}$, з метою виявлення найбільш інформативних коефіцієнтів і зменшення простору ознак проводиться процедура дисперсійного аналізу. Для цього, для кожного з перших коефіцієнтів визначається загальне розсіяння S_y , внутрішньогрупове (розсіяння всередині однієї групи коефіцієнтів, що характеризують один клас) S_z та міжгрупове (розсіяння між групами коефіцієнтів, що характеризують різні класи) S_x розсіяння значень досліджуваної ознаки. Мірою впливу ступеня дефектності виробу на зміну величини інформативних ознак є коефіцієнт значущості β_x .

Для формування множини діагностичних ознак слід використовувати такі коефіцієнти $a_k, k = \overline{0, n_1}$, значення β_{xk} для яких перевищує деякий пороговий рівень. На рис. 6.1 в якості приклада наведена діаграма оцінки впливу зміни ступеня дефектності спектральні складові імпульсного інформаційного сигналу. Стовпчики, що відповідають коефіцієнтам розкладу, для яких коефіцієнт β_x перевищує рівень 0,95, виділені суцільним кольором. Аналіз приведених діаграм показує, що найбільш інформативними є п'ять коефіцієнтів спектрального розкладу (a_0, a_2, a_4, a_5, a_8).

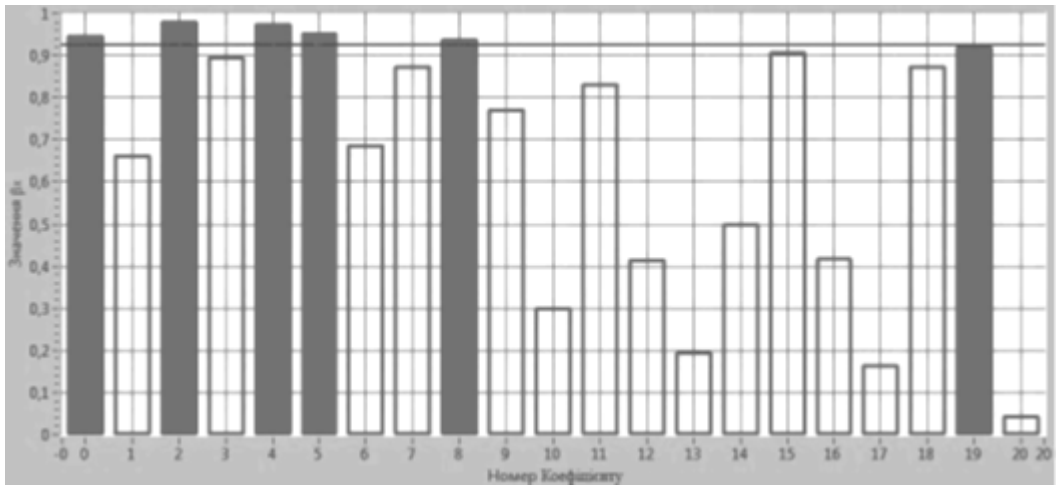


Рис. 6.1. Оцінка впливу дефектності на коефіцієнти спектрального розкладу

Таким чином, процедура ранжування діагностичних ознак виконується в два етапи: вибір з всієї множини коефіцієнтів спектрального розкладу n_1 коефіцієнтів, які мають найбільшу енергію, і вибір з n_1 таких коефіцієнтів (кількістю n_1'), значення яких найбільше залежать від ступеня дефектності зразка

і найменше від впливу випадкових факторів. Тобто, з простору розмірністю M вибирається такий підпростір з розмірністю M' , який дає можливість з заданою точністю апроксимувати заданий тип інформаційних сигналів, що відповідають певним вимірювальним перетворювачам. Аналітично це описується виразом:

$$\left| X_i(Z) - X_i^*(Z) \right| \leq \alpha, \quad (6.3)$$

де $X_i(Z)$ – фізичний інформаційний сигнал з простору розмірністю M ; $X_i^*(Z)$ – апроксимований сигнал на основі підпростору M' ; α – допустима похибка (розбіжність) між сигналами; $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_j\}$ – область визначення сигналу $X(Z)$, $j \in \overline{0, N-1}$; N – кількість відліків дискретного сигналу $X(Z)$.

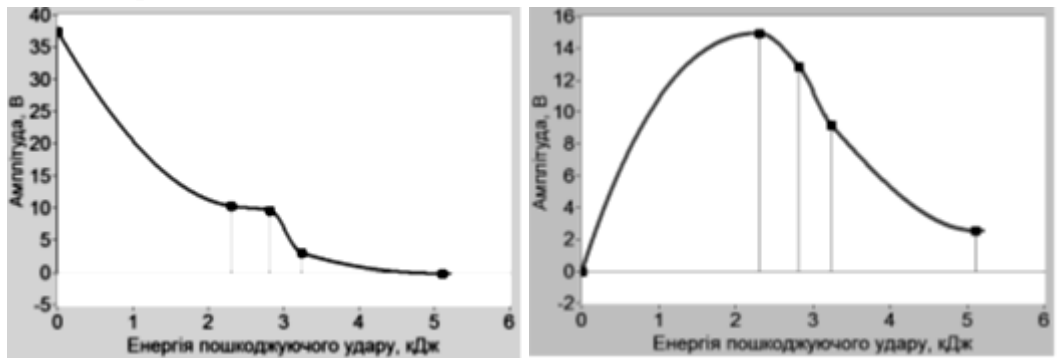
Такий підхід дає можливість в значній мірі зменшити кількість коефіцієнтів спектрального розкладу для аналізу та імітаційного моделювання інформаційного сигналу. В даній задачі розмірність простору ознак було зведено до $M' = 5$.

Для визначення значень відповідних коефіцієнтів розкладу характерних для інформаційних сигналів, що відповідають станам об'єктів, для яких ці сигнали не досліджувались, тобто побудови віртуальних еталонних сигналів, необхідно отримати функцію, яка апроксимує розподіл значень кожного з коефіцієнтів спектрального розкладу в залежності від стану досліджуваного об'єкта. Таку функцію можна визначити шляхом інтерполяції відомих значень коефіцієнтів розкладу, наприклад, степеневими поліномами або сплайнами. Далі для кожної спектральної складової необхідно вибрати бажане значення ступеня дефектності x об'єкта, визначити за встановленими функціональними залежностями значення спектральних складових та виконати зворотне перетворення [78].

В задачах інтерполяції, інтерполяція за допомогою сплайнів більш ефективна, аніж інтерполяція поліномами, оскільки дає достовірні результати навіть при менших степенях поліномів. Також при її використанні не виникає феномена Рунге, що має місце при використанні поліноміальної інтерполяції, особливо при застосуванні поліномів високих порядків (степенів). Системи лінійних рівнянь, які потрібно вирішувати для побудови сплайнів, дуже добре обумовлені, що дозволяє отримувати коефіцієнти поліномів з високою точністю. В результаті навіть при дуже великих об'ємах вибірок N обчислювальна схема не втрачає стійкості. Побудова таблиці коефіцієнтів сплайну потребує $O(N)$ операцій, а обчислення значення сплайну в заданій точці – $O(\log_2 N)$.

Як приклад на рис. 6.2 наведені побудовані з застосуванням кубічних сплайнів Ерміта інтерполяційні функції для перших двох спектральних складових в залежності від ступеня дефектності. Як видно з наведеного рисунку при застосуванні кубічних сплайнів Ерміта відсутні осциляції та від'ємні значення коефіцієнтів спектрального розкладу.

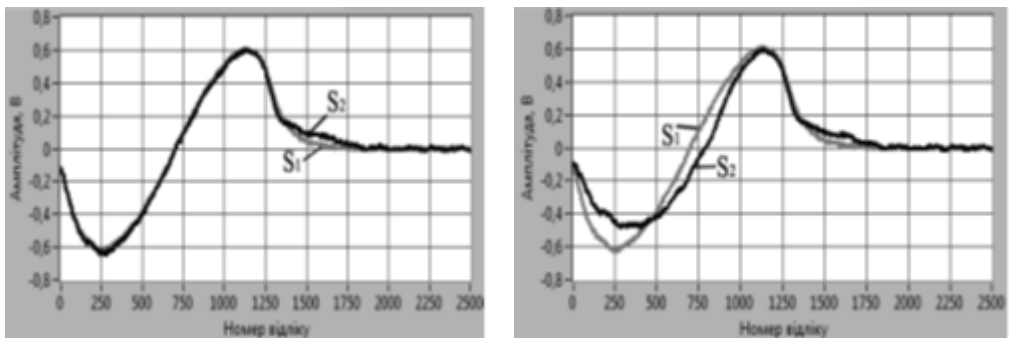
Для оцінки ефективності розглянутих алгоритмів було проведено порівняння змодельованих сигналів та фізичних сигналів отриманих при контролі об'єкта. В данному випадку використовувався дослідний зразок композитної панелі з ділянкою по якій було нанесено пошкодження ударом з енергією 2,9 кДж. На рис. 6.3 зображено реальний сигнал з ділянки з пошкодженням завданім ударом з енергією 2,9 кДж – крива S_1 та змодельований сигнал (крива S_2): за допомогою кубічних сплайнів Ерміта рис. 6.3,а і квадратичних сплайнів рис. 6.3,б.



а)

б)

Рис. 6.2. Апроксимація кубічними сплайнами Ерміта 1-ї (а) та 2-ї (б) складової спектрального розкладу інформаційного сигналу



а)

б)

Рис. 6.3. Реальний S_1 та змодельований S_2 інформаційні сигнали

Числово оцінку розбіжності змодельованих та реальних сигналів було проведено за допомогою розрахунку середньоквадратичної похибки між цими сигналами: для апроксимації кубічними сплайнами Ерміта ця похибка становить $2,53 \cdot 10^{-3}$, для апроксимації квадратичними сплайнами - $3,97 \cdot 10^{-2}$.

Підставляючи потрібне значення ступеня дефектності зразка, отримується відповідне йому значення кожного коефіцієнта спектрального розкладу. Відновлюючи сигнал за отриманими коефіцієнтами, можна отримати змодельований відповідний інформаційний сигнал – віртуальну міру. Таке моделювання дає змогу мінімізувати кількість зразків, що відтворюють відповідний стан досліджуваного об'єкта, які потрібно використовувати при налаштуванні систем діагностування, та оптимізувати проведення експериментальних досліджень на фізичному об'єкті.

При діагностиці об'єктів інформаційні сигнали характеризуються детермінованою та випадковою складовою. Випадкова складова описує такі фактори як наявність завад у вимірювальних каналах, випадкових похибок перетворювачів, просторової неоднорідності об'єктів дослідження, тощо. Отже, для побудови адекватної імітаційної моделі таких сигналів необхідно враховувати обидві складові.

На жаль, моделі, які базуються на фізичних рівняннях, що описують перетворення інформаційних сигналів в залежності від стану об'єкта, мають ряд недоліків, які не дозволяють їх застосовувати при розрахунках і формуванні простору діагностичних ознак. Тому доцільним є побудова стохастичних моделей інформаційних сигналів, які дозволяють врахувати їх випадкові зміни в часі, застосувати методи статистичної обробки, розширюючи простір діагностичних ознак, підвищуючи достовірність діагностування.

Для вибору методу побудови імітаційної моделі інформаційного сигналу діагностичної системи необхідно провести статистичну оцінку отриманих значень коефіцієнтів спектрального розкладу. У випадку, коли можливо прийняти гіпотезу про гауссовість розподілу ознак, достатньо визначити такі оцінки:

математичне сподівання

$$M\{U\} = \bar{U} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B u_i, \quad (6.4)$$

де u_i – досліджувана вибірка; B – об'єм вибірки.

середньоквадратичне відхилення (с.к.в.):

$$\sigma(U) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (u_i - \bar{u})^2}. \quad (6.5)$$

Імітаційну модель інформаційного сигналу з врахуванням його детермінованої та випадкової складової можна представити як [27]:

$$S_i(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} [a_{i,j} + \eta_j] g_j(Z), \quad i = \overline{0, L-1}, \quad (6.6)$$

де $a_{i,j}$ – детермінована складова сигналу, знаходиться за алгоритмом описаним раніше через функціональну залежність розподілу значень коефіцієнтів спектрального розкладу в залежності від стану об'єкта; η_j – випадкова складова, яка знаходиться на основі власних чисел та власних векторів коваріаційної матриці коефіцієнтів спектрального розкладу сигналу; $g_j(Z)$ – вибраний базис ортогональних функцій дискретного аргументу; L – обсяг генерованої вибірки інформаційного сигналу; n – кількість складових в спектрі сигналу.

Детермінована складова сигналу знаходиться наступним чином. Необхідно розглянути вектор $X(Z) = (X_0, X_1, \dots, X_\gamma)$, елементи якого отримані в результаті рівномірної дискретизації сигналу датчика $X(t)$. Тоді можна знайти вектор $Y(Z) = (Y_0, Y_1, \dots, Y_\gamma)$, $Y_\gamma = \mathbf{M}[X_\gamma]$ – математичне сподівання вектора $X(Z)$, $\gamma = \overline{0, N-1}$, N – розмірність цього вектора. Після чого визначаються значення:

$$a_{i,j} = \langle Y(Z)_i, g_j(Z) \rangle, \quad i = \overline{0, L-1}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (6.7)$$

де $a_{i,j}$ – j -й коефіцієнт спектрального розкладу i -ї реалізації інформаційного сигналу; L – розмірність вибірки.

Для випадку, що розглядається, перший комплекс діагностичних ознак моделі, що характеризує детерміновану складову, формується з п'яти складових розкладу ($n_1 = 5$) інформаційного сигналу за обраним базисом ортогональних функцій Хартлі дискретного аргументу (кількість відліків дискретного сигналу $X(Z)$ складає $N = 2500$). Моделювання певного ступеня пошкодження зразка відбувається шляхом зміни значень необхідних складових спектру сигналу до значень, що характерні для інформаційних сигналів, отриманих на об'єктах з відповідним ступенем пошкодження.

Другий комплекс діагностичних ознак, що характеризує випадкову складову моделі, визначається на основі перетворення Карунена-Лоєва. Перетворення Карунена-Лоєва має фундаментальне значення, тому що воно призводить до побудови некорельованих ознак. Таким чином, матиме місце рівняння:

$$\eta_j = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(j), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (6.8)$$

де $\xi_k = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \varphi_k(j)$ – коефіцієнти розкладу, які є незалежними гаусівськими випадковими величинами з дисперсіями $D_{\xi_k} = \sigma_k^2, k = \overline{0, n-1}$; $\{\varphi_k(j), k, j = \overline{0, n-1}\}$ – ортонормований базис, елементи $\varphi_k(j)$ якого є власними векторами коваріаційної матриці R реального сигналу.

Дисперсії $D_{\xi_k} = \sigma_k^2, k = \overline{0, n-1}$, рівні власним числам $\lambda_k, k = \overline{0, n-1}$, коваріаційної матриці R , що відповідають власним векторам $\varphi_k(j), k = \overline{0, n-1}$. Елементи матриці R :

$$r_{i,j} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k,i} - m_i)(v_{k,j} - m_j)}{n-1}, \quad (6.9)$$

де $v_{i,j}$ – елементи матриці V коефіцієнтів спектрального розкладу інформаційних сигналів $X(Z)$; m_i – елементи матриці M математичних сподівань кожного коефіцієнта спектрального розкладу інформаційного сигналу.

Матриці V та M формуються наступним чином:

$$V = \begin{pmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \cdots & v_{0,n-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{B-1,0} & v_{B-1,1} & \cdots & v_{B-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad M = \{m_0, m_1, \dots, m_{n-1}\}, \quad (6.10)$$

де B – кількість реалізацій інформаційних сигналів; n – кількість коефіцієнтів спектрального розкладу однієї реалізації; $m_i = \sum_{k=0}^{B-1} v_{k,i} / B$.

Повна енергія вектора $\eta = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}\}$ визначається як:

$$\sum_{i=0}^{n-1} R_{ii} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k. \quad (6.11)$$

Множина власних чисел λ_k і власних векторів $\varphi_k(j)$ однозначно характеризують коваріаційну матрицю R , а значить і вектор η , тому доцільним буде вибір в якості другого комплексу ознак $n_2 = n_1 = 5$ власних чисел та відповідних до них власних векторів коваріаційної матриці вектора η .

Моделювання інформаційних сигналів виконується за алгоритмом, зображеним на рис. 6.4.

Вибір коефіцієнтів ортогонального розкладу a_{k_1} , $k_1 = \overline{0, n_1 - 1}$, власних чисел λ_{k_2} та власних векторів $\varphi_{k_2}(j)$, $k_2 = \overline{0, n_2 - 1}$, $j = \overline{0, n - 1}$ здійснювалось з використанням реалізацій оцінок цих характеристик, отриманих при аналізі реальних інформаційних сигналів.

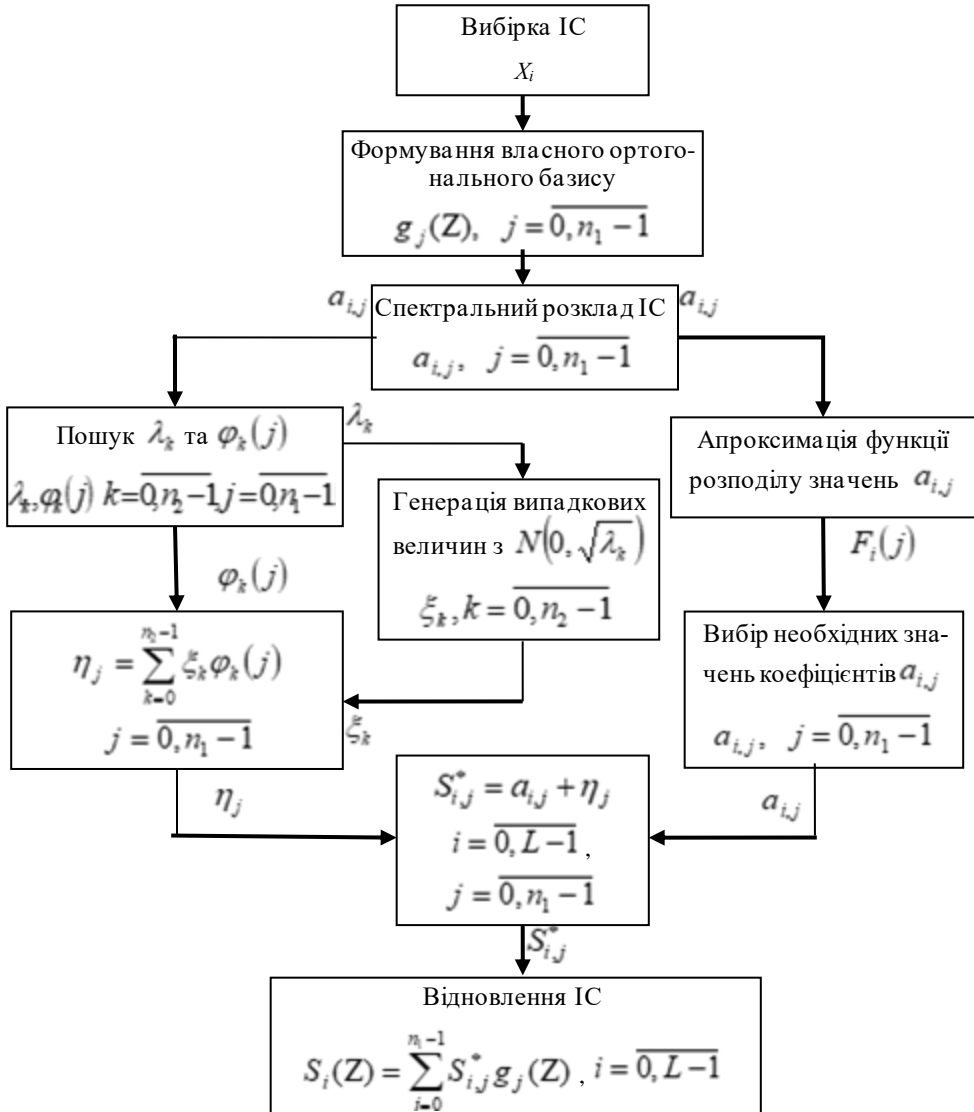


Рис. 6.4. Алгоритм імітаційного моделювання інформаційних сигналів

Оскільки кожна складова спектрального розкладу характеризується різним значенням розсіяння в залежності від ступеня пошкодження об'єкта та порядкового номера, тому в схемі імітаційного моделювання відповідно для кожного коефіцієнта матиме місце різні за значенням власні числа λ_k та власні вектори $\varphi_k(j)$. Таким чином, кожна зі спектральних складових буде в різній степені зазнавати вплив випадкових факторів на її детерміновану складову, що й відбувається при аналізі реальних інформаційних сигналів отриманих при діагностиці виробів. Отже, можна відзначити, що описаний підхід дозволяє створити імітаційну модель, що в найбільш повному обсязі описує реальний інформаційний сигнал.

За допомогою описаного алгоритму імітаційного моделювання було згенеровано моделі реалізації інформаційних сигналів, що відповідають різним ступеням дефектності реальних зразків (по 250 реалізацій для кожного з п'яти зразків). На рис. 6.5 представлено реальні та змодельовані сигнали, що мають місце при контролі бездефектного зразка та зразків з різним ступенем пошкодження, крива S_1 це реальний сигнал, а крива S_2 – змодельований сигнал.

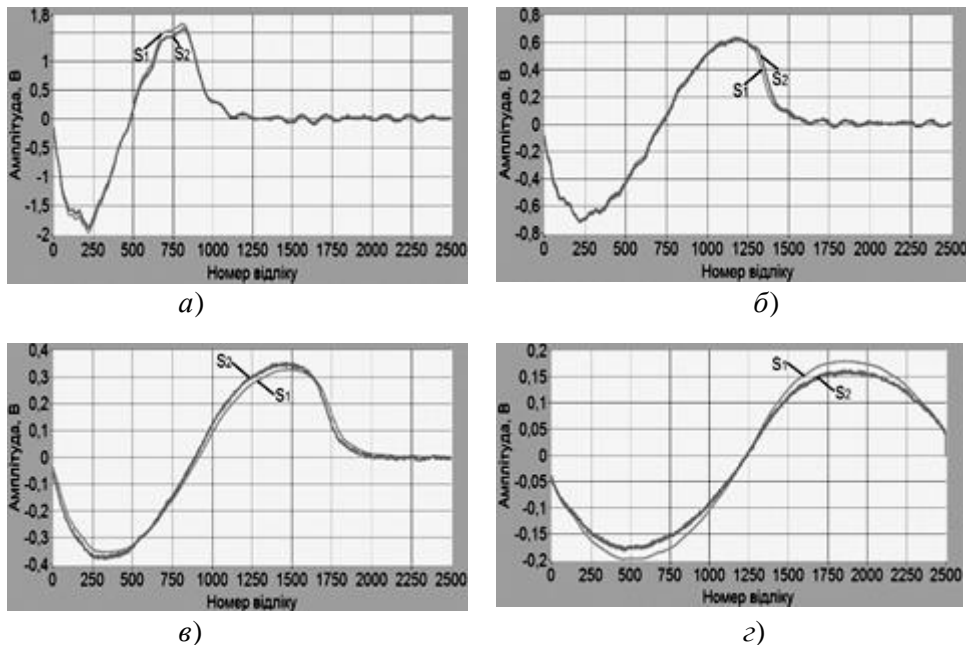


Рис. 6.5. Фізичні та змодельовані інформаційні сигнали: зразок без пошкодження (а) та зразки з пошкодженнями ударом 2,3кДж (б), 3,2кДж (в), 5,1кДж (з)

Для порівняння фізичних і змодельованих сигналів, було визначено значення середньоквадратичної похибки між їхніми значеннями: для бездефектного зразка ця похибка становила $3,6 \cdot 10^{-3}$; для зразків з пошкодженнями ударами з

енергіями 2,3 кДж, 2,8 кДж, 3,2 кДж, 5,1 кДж значення відносної похибки відповідно складає $2,4 \cdot 10^{-3}$, $2,0 \cdot 10^{-3}$, $2,6 \cdot 10^{-3}$, $1,8 \cdot 10^{-3}$.

Таким чином, можна зробити висновок, що отримані імітаційні моделі відповідають за параметрами та характеристиками реальним інформаційним сигналам, і можуть бути використані в подальшому при формуванні навчальної вибірки та створення бібліотеки віртуальних еталонів, яку можна використовувати для налаштування діагностичних систем (особлива при багатопараметровій діагностиці), а також з метою формування контрольної вибірки для перевірки достовірності роботи класифікатора системи та його валідації за умови обмеженої кількості, або відсутності фізичних еталонних зразків. Крім того, імітаційні моделі інформаційних сигналів можуть застосовуватись при проведенні навчання класифікаторів, побудованих на основі штучних нейронних мереж [27].

6.2. Нейромережеві технології у безеталонній дефектоскопії композитних матеріалів

Через велику номенклатуру композиційних матеріалів та їх дефектів, а також складність виготовлення стандартних зразків для усіх типів можливих конструкцій з усіма можливими дефектами, важливою задачею при контролі композитів є реалізація принципів безеталонної дефектоскопії. Принцип безеталонної дефектоскопії полягає в тому, що контроль проводиться без використання стандартних зразків з нормованими характеристиками дефектів, або використовується їх мінімальна кількість.

Безеталонна дефектоскопія можлива у двох варіантах:

1. Існують зразки досліджуваних композиційних матеріалів, що не містять дефекти, і настройка дефектоскопа відбувається за допомогою еталонних зразків, а за допомогою методів безеталонної дефектоскопії вибірки інформативних параметрів з еталонного зразка порівнюються з вибірками досліджуваного зразка і за певними критеріями приймається рішення.

2. При відсутності зразків досліджуваних матеріалів у якості навчальної береться вибірка інформативних параметрів із бездефектної зони досліджуваного виробу, наприклад за методом 3-х точок.

Безеталонна дефектоскопія базується на визначенні відмінностей інформативного параметру в одній зоні досліджуваного виробу відносно іншої (інших зон). Для побудови вирішальних правил безеталонної дефектоскопії в класичному варіанті застосовуються статистичні критерії перевірки гіпотез, за допомогою яких оцінюється статистична значущість відмінностей між порівнюваними вибірками інформативних параметрів. Тому для побудови і застосування безеталонних вирішальних правил необхідно накопичення статистичного матеріалу та його обробка.

Вирішальні правила, побудовані на критеріях перевірки статистичних гіпотез, що використовують статистичні критерії, які поділяються на критерії згоди та критерії однорідності, параметричні та непараметричні в залежності від наявної апіорної інформації про досліджувані об'єкти, їх закони розподілів та ін. Перевагою цих методів є те, що гіпотеза приймається чи відхиляється при заданому рівні значущості за певним правилом (критерієм) перевірки гіпотези, а значення статистики, отримане на основі експериментальних даних і визначене за цим критерієм, порівнюється із критичним значенням, що визначається для відомих законів розподілів статистики критерію по заданому рівню значущості. Ці методи дають можливість одночасного врахування ознак різної природи, тому що вони характеризуються безрозмірними величинами – ймовірностями їх появи при різних станах досліджуваних об'єктів [76]. Недоліками застосування методів перевірки статистичних гіпотез для побудови вирішальних правил є значне їх ускладнення при використанні декількох інформативних ознак, так як треба проводити аналіз багатовимірних законів розподілів.

Крім зазначених статистичних методів для побудови вирішальних правил безеталонної дефектоскопії доцільно використовувати нейромережеві класифікатори в поєднанні з методами імітаційного моделювання інформаційних сигналів, що дає можливість суттєво підвищити достовірність контролю та розрізнявальну здатність при визначенні типу дефекту або його розміру.

Сучасні методи та засоби діагностики дозволяють отримати велику кількість інформативних параметрів, що характеризують стан об'єкта діагностики. Отже, має місце велика розмірність простору діагностичних ознак, за якими будуються вирішальні правила. Таким чином, виникає задача відбору інформативних ознак, за якими буде проводитися контроль і формування правил прийняття рішення діагностики, а також задача розробки методів і алгоритмів, що дозволяють ефективно виконувати обробку даних в багатовимірному просторі ознак і не потребують значних апаратних ресурсів. Використання статистичних методів в такому випадку ускладнене, оскільки доводиться аналізувати багатовимірні функції розподілу ймовірності, що значно підвищує обчислювальні витрати на реалізацію відповідного алгоритму. Також додаткові труднощі виникають при розробці та реалізації відповідного математичного забезпечення інформаційно-діагностичних систем. Доводиться використовувати складні методи обробки інформаційних сигналів та побудови вирішальних правил: на основі статистичних критеріїв, які призводять до формування складних вирішальних правил, тому при безеталонній дефектоскопії, необхідно застосовувати такі методи та алгоритми, які дозволяють ефективно виконувати обробку даних в багатовимірному просторі діагностичних ознак, накопичувати отриману інформацію про можливі дефекти, визначати

закономірності в зміні значень параметрів інформаційних сигналів в залежності від ступеня дефектності об'єкта діагностування, розширювати базу класів дефектів та уточнювати її в процесі роботи без повного перенавчання системи.

Найбільш прийнятними в такому випадку є методи класифікації на основі штучних нейронних мереж. Зокрема, мережі з прямим зв'язком є універсальним і ефективним засобом апроксимації функцій, оскільки генерують велике число регресійних моделей, що дозволяє використовувати їх для класифікації об'єктів у багатовимірному просторі діагностичних ознак. В задачах діагностики навчена нейронна мережа не тільки вмє розпізнавати (класифікувати) отримані під час контролю інформаційні сигнали, а й зберігає інформацію про закономірності та взаємозв'язки характеристик інформаційного сигналу та стану об'єкта контролю, а також може правильно класифікувати інформаційні сигнали, що відповідають можливим дефектам, які не зустрічались під час навчання мережі.

Вибір архітектури є дуже важливим етапом при розробці нейромережевого класифікатора в складі діагностичних систем. Необхідно чітко знати, який саме клас задач вирішуватиме дана діагностична система, оскільки різні архітектури нейронних мереж розроблені та призначені для вирішення конкретних груп задач.

Оскільки галузі застосування найбільш відомих парадигм перетинаються, то для вирішення конкретної задачі можна використовувати різні архітектури нейронних мереж, при цьому результати можуть виявитися суттєво різними. Отже для вибору кращої архітектури необхідно проводити детальні дослідження.

Серед найбільш популярних і ефективних основних парадигм нейронних мереж, які застосовуються в задачах класифікації та кластерного аналізу можна виділити наступні мережі: багатошаровий персептрон, радіально-базисні нейронні мережі, нейронні мережі і карти Кохонена, мережі адаптивної резонансної теорії. Так само, для вирішення поставлених задач можуть застосовуватися, так звані, гібридні нейронні мережі, що можуть поєднувати та містити в собі концепції деяких базових парадигм (види нейронів, архітектуру мережі, методи навчання тощо).

В табл. 6.1 представлені найпоширені архітектури нейронних мереж і пов'язані з ними алгоритми навчання (список не є вичерпним).

Мережа певної архітектури потребує відповідного алгоритму навчання і призначена для вирішення обмеженого класу задач. Окрім розглянутих алгоритмів навчання, поширеними також є алгоритми: Adaline і Madaline [126], лінійний дискримінантний аналіз, проєкції Саммона, аналіз головних компонентів [128] тощо.

Для вибору архітектури нейронної мережі, яку можна використовувати в задачах безеталонної дефектоскопії необхідними умовами є: можливість навчатись без учителя, здатність вирішувати задачі категоризації даних (кластерний аналіз) та класифікації. З табл. 6.1 видно, що серед розглянутих архітектур цим вимогам задовольняють нейронні мережі адаптивної резонансної теорії (ART).

Таблиця 6.1

Парадигма	Правило навчання	Архітектура	Алгоритм навчання	Задача
З учителем	Корекція помилки	Одношаровий та багатошаровий персептрон	Алгоритми навчання персептрона Зворотне розповсюдження	Класифікація образів Апроксимація функцій Прогнозування
	Больцмана	Рекурентна	Алгоритм навчання Больцмана	Класифікація образів
	Хебба	Багатошарова прямого розповсюдження	Лінійний дискримінантний аналіз	Аналіз даних Класифікація образів
Без учителя	Хебба	Прямого розповсюдження	Аналіз головних компонентів	Аналіз даних Стиснення даних
		Мережа Хопфілда	Навчання асоціативної пам'яті	Асоціативна пам'ять
	Змагання	Мережа LVQ	Змагання Векторне квантування	Категоризація Стиснення даних
		SOM Кохонена	SOM Кохонена	Категоризація Аналіз даних
		Мережі ART	ART-1, ART-2, Fuzzy-ART	Категоризація, Класифікація образів
Змішана	Корекція помилки та змагання	Мережа RBF	Алгоритм навчання RBF	Класифікація образів Апроксимація функцій Прогнозування

Алгоритм побудови класифікатора на основі нейронних мереж виглядає наступним чином:

1. Робота з даними:

підготувати вибірку навчальних прикладів, характерних для даної задачі;
розбити всю сукупність даних на навчальну, контрольну і тестову множини.

2. Попередня обробка:

вибрати систему ознак, характерних для даної задачі, і виконати перетворення даних відповідним чином для подачі на вхід мережі. В результаті бажано отримати лінійно роздільний простір множини даних;

вибрати систему кодування вихідних значень.

3. Конструювання, навчання і оцінка якості мережі:

вибрати топологію мережі: кількість шарів, число нейронів в шарах тощо;

вибрати функцію активації нейронів;

вибрати алгоритм навчання мережі;

оцінити якість роботи мережі на основі тестової множини або іншого критерію, оптимізувати архітектуру;

вибрати оптимальний варіант мережі й оцінити достовірність її роботи.

4. Застосування та діагностика:

дослідити ступінь впливу різних чинників на прийняття рішення;

переконатися, що мережа забезпечує необхідну достовірність виявлення аномалій і класифікації,

при необхідності повернутися на етап 2, змінивши спосіб представлення об'єктів або змінивши базу даних;

практично використовувати мережу для вирішення поставленої задачі.

Узагальнена структурна схема блока діагностики, що реалізує безеталонний метод, на основі нейромережевого класифікатора представлена на рис. 6.3. Такий блок реалізується у вигляді спеціалізованого програмного забезпечення діагностичних систем.

Необхідно відзначити, що процес навчання блока діагностики може проводитися не тільки експериментальним шляхом на еталонних або реальних (контрольованих) зразках, але і за допомогою імітаційного моделювання інформаційних сигналів, що відповідають різним типам можливих дефектів. При імітаційному моделюванні використовуються моделі інформаційних сигналів, які спостерігаються при контролі конкретного виробу певним типом первинного перетворювача.

Моделі інформаційних сигналів відрізняються один від одного в залежності від використаних перетворювачів, методів контролю, первинної обробки інформаційних сигналів, тощо.



Рис. 6.6. Структурна схема блока діагностики

Безеталонна діагностика виробів нейронними мережами адаптивної резонансної теорії.

В процесі вирішення задачі безеталонної діагностики виникає дилема: яким чином зробити так, щоб пам'ять НМ залишалась пластичною, здатною до сприйняття нових даних і побудови нових класів, що відповідають новим типам дефектів, і в той же час зберігала стабільність, яка гарантує, що інформація про вже відомі класи не знищиться і не зруйнується в процесі функціонування.

Мережі й алгоритми адаптивної резонансної теорії [119, 120] дозволяють зберігати пластичність, необхідну для вивчення нових класів об'єктів, у той же час запобігаючи зміні раніше запам'ятованих класів.

Мережі ART включають декілька парадигм, кожна з яких визначається формою вхідних даних і способом їхньої обробки. ART-1 розроблена для обробки бінарних вхідних векторів, а мережі ART-2 та Fuzzy-ART можуть класифікувати як бінарні, так і неперервні вектори даних [119, 121].

Мережі ART являють собою векторний класифікатор і працюють за алгоритмом, що зображено на рис. 6.7. Вхідний вектор класифікується в залежності від того, на який з раніше запам'ятованих мережею еталонних векторів він схожий.

Рішення щодо класифікації вхідного вектора мережа ART виражає у формі збудження одного з нейронів шару розпізнавання.

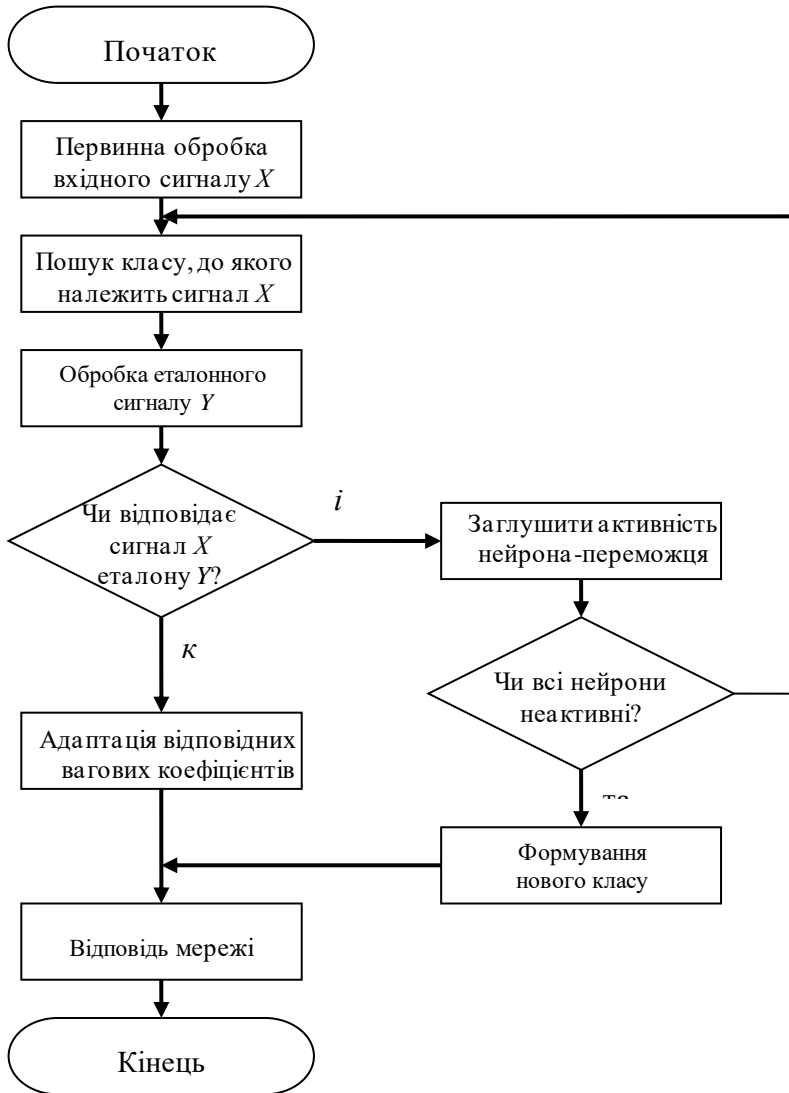


Рис. 6.7. Алгоритм роботи нейронних мереж сімейства ART

Якщо вхідний вектор не відповідає жодному з запам'ятованих образів, створюється нова категорія (виділяється новий нейрон та запам'ятовується новий вектор), яка відповідає вхідному вектору. Якщо визначено, що вхідний вектор схожий на один з раніше запам'ятованих векторів за визначеним критерієм подібності, еталонний вектор в пам'яті НМ буде змінюватися (навчатися) під впливом

нового вхідного вектора таким чином, щоб стати більш схожим на даний вхідний вектор.

Запам'ятований еталонний вектор не буде змінюватись, якщо поточний вхідний вектор не виявиться схожим на нього. В такий спосіб вирішується дилема стабільності-пластичності. Новий вектор може створювати додаткові класифікаційні категорії, однак новий вхідний вектор, що відповідає новим типам дефектів не може змусити змінитися або зтерти існуючу пам'ять.

Класифікатор на основі модифікованої нейронної мережі ART-2.

Нейронна мережа ART-2 була розроблена для аналізу неперервних вхідних сигналів. С.Гроссберг і Г.Карпентер у роботах [119, 120] описали декілька можливих архітектур мережі ART-2, які зображено на рис. 6.8, де білі стрілки позначають специфічні операції у шарах F_1 та F_2 мережі ART-2, чорні стрілки позначають операції елементів керування мережі, заштриховані кола на рисунку відображають операцію пошуку норми вектора.

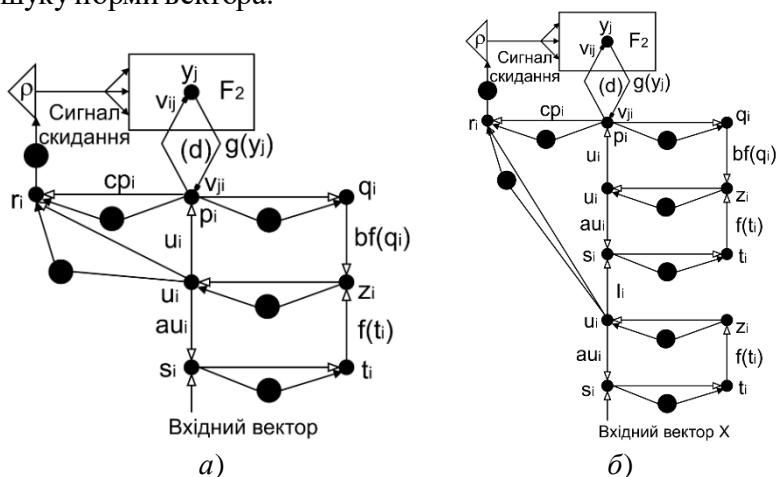


Рис. 6.8. Типи архітектур нейронних мереж ART-2

Основні рівняння, що описують роботу шару порівняння F_1 мережі:

$$p_i = u_i + \sum_j g(y_j) v_{j,i}, \quad q_i = p_i / (e + |p|), \quad u_i = z_i / (e + |z|), \quad (6.12)$$

$$z_i = f(t_i) + b \cdot f(q_i), \quad s_i = x_i + a \cdot u_i, \quad t_i = s_i / (e + |s|), \quad (6.13)$$

де $|\bullet|$ – L_2 -норма вектора в Евклідовому просторі; y_j – вихід j -го нейрона шару розпізнавання F_2 ; $v_{j,i}$ – елементи матриці вагових коефіцієнтів V ; a і b – коефіцієнти, що знаходяться експериментальним шляхом; e – параметр, що характеризує відношення між часом роботи нейронів шарів F_1 та F_2 , $0 < e \ll 1$; $f(x)$ – нелінійна сигнальна функція активації нейронів, може бути неперервно диференційованою:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \theta \cdot x^2 / (x^2 + \theta^2), & \text{при } 0 \leq x < \theta \\ x, & \text{при } x \geq \theta \end{cases}, \quad (6.14)$$

або кусково-лінійною:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < \theta \\ x, & \text{при } x \geq \theta \end{cases}. \quad (6.15)$$

Основні рівняння, що описують роботу шару розпізнавання F_2 мережі ART-2:

$$T_j = \sum_i p_i w_{i,j}, \quad T_k = \max \{T_j : j = \overline{1, m}\}, \quad (6.16)$$

$$g(y_k) = \begin{cases} d, & \text{при } T_k = \max_j (T_j) \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (6.17)$$

де $w_{i,j}$ – елементи матриці вагових коефіцієнтів W ; d – коефіцієнт, що знаходиться експериментальним шляхом.

Таким чином, на пристрій порівняння поступатиме вектор p_i :

$$p_i = \begin{cases} u_i, & \text{при неактивних нейронах шару } F_2 \\ u_i + d \cdot v_{k,i}, & \text{при активному нейроні-переможцю } k \end{cases}. \quad (6.18)$$

Пристрій порівняння активує сигнал заглушення, якщо не буде виконано умову: $\rho / (e + |r|) \geq 1$. Коефіцієнт чутливості класифікатора ρ вибирається в інтервалі $[0, 1]$, а $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – вектор, що характеризує ступінь відмінності

вхідного вектора X та еталонного вектора W_k в пам'яті мережі $r_i = \frac{u_i + c \cdot p_i}{e + |u| + |c \cdot p|}$,

c – ваговий коефіцієнт, що вибирається з нерівності $c \cdot d / (1 - d) \leq 1$.

У випадку правильної класифікації вхідного вектора сигнал заглушення не активується, а вагові коефіцієнти матриць W та V модифікуються наступним чином:

$$v_{j,i}^{new} = v_{j,i}^{old} + \Delta v_{j,i}, \quad \Delta v_{j,i} = g(y_j) [p_i - v_{j,i}] = d \cdot (p_i - v_{k,i}), \quad (6.19)$$

$$w_{i,j}^{new} = w_{i,j}^{old} + \Delta w_{i,j}, \quad \Delta w_{i,j} = g(y_j) [p_i - w_{i,j}] = d \cdot (p_i - w_{i,k}). \quad (6.20)$$

де $v_{j,i}^{old}$ і $v_{j,i}^{new}$ – вагові коефіцієнти матриці V відповідно до та після модифікації; $w_{i,j}^{old}$ і $w_{i,j}^{new}$ – вагові коефіцієнти матриці W відповідно до та після модифікації.

На початку роботи мережі ART-2 та при формуванні нового нейрону (у випадку формування нового класу) значення відповідних вагових коефіцієнтів ініціалізуються початковими значеннями

$$v_{j,i} = 0, w_{i,j} \leq 1/(1-d)\sqrt{N}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}, \quad (6.21)$$

де N – розмірність вхідного вектора X ; m – кількість нейронів в шарі розпізнавання F_2 (кількість запам'ятованих класів).

Нейронна мережа ART-2 не чутлива до порядку пред'явлення вхідних векторів, може працювати як з бінарними, так і з неперервними сигналами, має високу швидкість роботи, та високу достовірність класифікації даних. До того ж ART-2 має властивість до самостійного виправлення помилок класифікації після певної кількості циклів повторного пред'явлення навчальної вибірки.

На рис. 6.9 зображено структурну схему модифікованої мережі ART-2, де виділено блоки, які були змінені та доповнені по відношенню до класичної мережі.

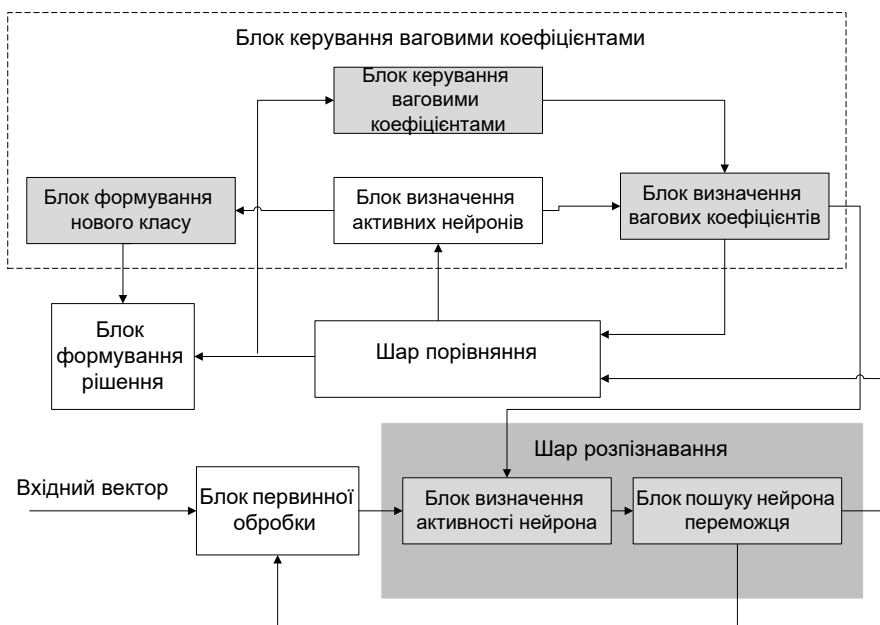


Рис. 6.9. Структурна схема модифікованої нейронної мережі ART-2

При застосуванні розробленої мережі ART-2 та алгоритму її роботи була отримана вища достовірність контролю стану виробів з композиційних матеріалів порівняно з класичною реалізацією. В табл. 6.2 наведено порівняльний аналіз результатів роботи класичної та модифікованих архітектур ART-2. Для

аналізу використовувалась вибірка з 2500-ма реалізаціями інформаційних сигналів дефектоскопа, що реалізує метод низькошвидкісного удару, отриманих при контролі стільникових панелей.

В цілому необхідно відзначити, що модифікована і класична мережі ART-2 мають такі переваги: стабільність запам'ятованої інформації та можливість динамічно розширювати власну базу знань, висока роздільна здатність при класифікації даних, підвищена завадозахищеність, інваріантність відносно порядку пред'явлення вхідних векторів, існує можливість змінювати швидкість навчання мережі, при повторному пред'явленні навчальної вибірки нейронна мережа здатна сама виправити помилки, які були допущені на попередньому етапі навчання, можливість працювати з неперервними сигналами.

Таблиця 6.2

Архітектура мережі	Показник				
	Час аналізу вибірки*, мс	Обсяг пам'яті для зберігання мережі, кБ	Достовірність контролю при значенні коефіцієнта чутливості ρ		
			$\rho = 0,965$	$\rho = 0,975$	$\rho = 0,985$
Класична ART-2	1740	203	0,98	0,99	0,98
ART-2 з однією матрицею вагових коефіцієнтів	1080	127	0,99	0,99	0,98
ART-2 з двома критеріями порівняння	1610	203	0,99	1,00	1,00

Класифікатор на основі модифікованої нейронної мережі Fuzzy-ART.

Розширена архітектура мережі ART-1 за рахунок введення нечітких елементів має назву Fuzzy-ART [121] або нечіткої ART-мережі. Нечіткі оператори використовуються для:

- визначення класу k (визначення нейрона-переможця);
- розрахунку ступеня подібності вхідного та еталонного векторів;
- адаптації вагових коефіцієнтів нейронів мережі.

На рис. 6.10 зображено базову архітектуру мережі Fuzzy-ART.

Необхідно відзначити характерну особливість мережі Fuzzy-ART: обидві матриці вагових коефіцієнтів (W та V) об'єднуються в одну матрицю W . Складові вхідних векторів X – дійсні числа, нормуються в інтервалі $[0, 1]$. В шарі розпізнавання F_2 містяться нейрони для зберігання інформації про вивчену номенклатуру класів. На початку процесу навчання НМ кожен клас j встановлюється у неактивний початковий стан. Між входом і шаром розпізнавання

розташована матриця вагових коефіцієнтів W . Всі її елементи (вагові коефіцієнти) спочатку ініціалізуються одиницями, тобто $w_{ij} = 1$ для $i = 1, 2, \dots, n$ та $j = 1, 2, \dots, m$ (індекс i відповідає елементу вхідного вектора, а j – нейрону (номеру класу) шару розпізнавання). В мережі Fuzzy-ART встановлюються також наступні параметри:

параметр вибору $\alpha > 0$, що визначає вибір класу в момент класифікації;

коефіцієнт корекції $\eta \in [0, 1]$, що суттєво впливає на швидкість навчання нейронної мережі;

коефіцієнт чутливості класифікатора або рівень подібності вхідного та еталонного векторів $\rho \in [0, 1]$, що впливає на процес формування класів.

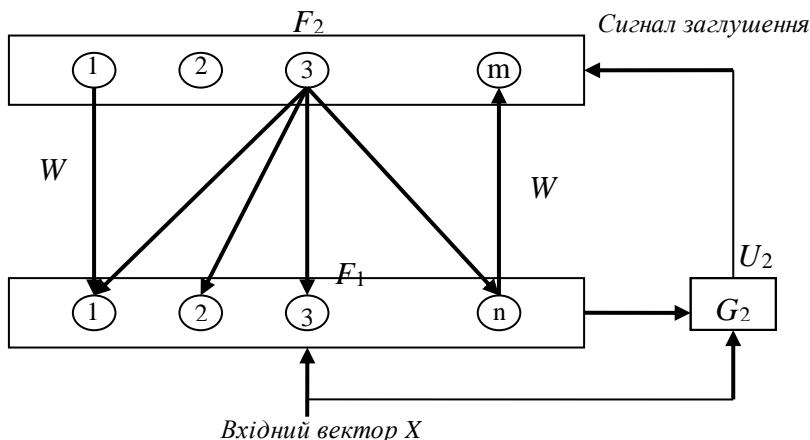


Рис. 6.10. Архітектура нейронної мережі Fuzzy-ART

Для визначення класу k , до якого належить вхідний вектор X , визначається спочатку ступінь активації нейронів $y_j = \frac{|X \cap W_j|}{\alpha + |W_j|}$, при цьому вхідний вектор X відноситься до того класу y_j , для якого ступінь активації максимальний $y_k = \max_j(y_j)$.

В тих випадках, коли два класи мають однакове максимальне значення ступеня активації, вибирається клас з еталонним сигналом з найменшим індексом. Цим самим забезпечується той факт, що нейрони шару розпізнавання F_2 виділяються для кожного класу вхідних сигналів у послідовності $1, 2, \dots, n$.

Після першої фази розпізнавання відбувається, фаза порівняння. Вона полягає у порівнянні поточного вхідного вектора з прототипом визначеного класу k . При виконанні даного критерію активується процес адаптації (модифікації)

вагових коефіцієнтів. В протилежному випадку продовжується пошук альтернативного класу в шарі розпізнавання або виділення нового нейрона для формування нового класу вхідних сигналів. Корекція вектора вагових коефіцієнтів відбувається за правилом

$$W_j(t+1) = \eta[X \cap W_j(t)] + (1-\eta)W_j(t),$$

де t – номер поточного етапу навчання.

В класичній мережі Fuzzy-ART присутні деякі недоліки, що роблять її не придатною для вирішення задачі безеталонної діагностики. Вирішити цю проблему можна шляхом заміни певних складових елементів мережі. На рис. 6.11 зображено блок-схему модифікованої мережі Fuzzy-ART, де виділено блоки, що були додані або змінені порівняно з класичною реалізацією мережі.

Класична архітектура даної мережі чутлива до порядку пред'явлення вхідних векторів під час роботи. Щоб вирішити описаний недолік, запропонована модифікація класичної архітектури та алгоритму функціонування мережі Fuzzy-ART. Для цього застосовувався додатково оператор нечіткого АБО \cup :

$$X \cup Y = \max(X, Y), \quad (6.22)$$

тобто при певному $x_i \leq y_i$ матиме місце:

$$x_i \cup y_i = \max(x_i, y_i) = y_i. \quad (6.23)$$

В модифікованій мережі Fuzzy-ART у шарі порівняння на другій фазі визначається наступний вираз:

$$\rho^* = \frac{|(X \cup W_k) - (X \cap W_k)|}{|X|}. \quad (6.24)$$

Даний вираз визначає ступінь подібності вхідного вектора X та еталонного вектора W_k в базі даних нейронної мережі. При $w_{k,i} = x_i$ (для всіх $i = \overline{1, n}$) $\rho^* = 0$ і буде зростати пропорційно збільшенню відмінності між двома векторами. Елемент G_2 активує сигнал заглушення, якщо не виконується умова $\rho^* \leq 1 - \rho$, де ρ – коефіцієнт чутливості класифікатора.

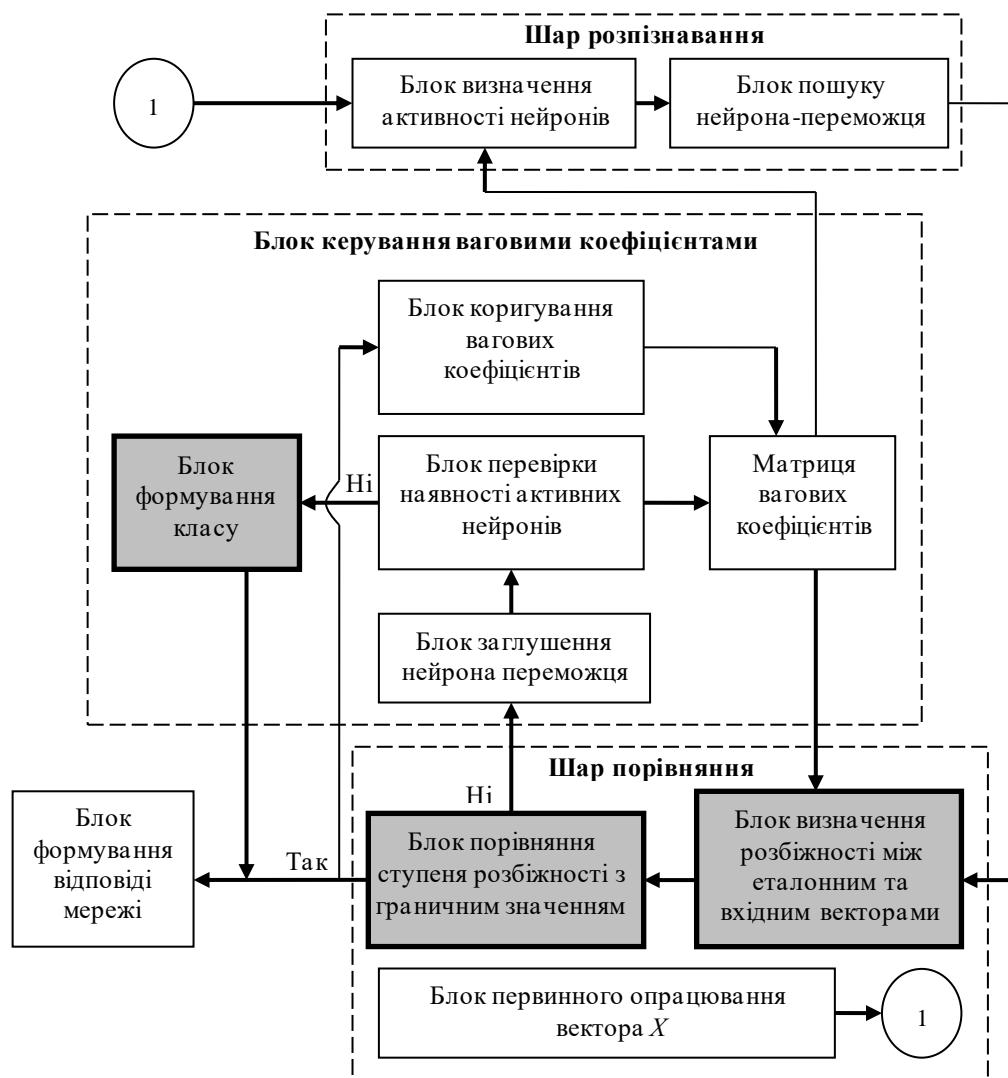


Рис. 6.11. Блок-схема модифікованої мережі Fuzzy-ART

Такий підхід надає Fuzzy-ART незалежність від порядку пред'явлення вхідних векторів, і таку НМ можна використовувати для вирішення поставлених задач безеталонної діагностики.

В табл. 6.3 наведено результати дослідження основних характеристик модифікованої нейронної мережі Fuzzy-ART.

Таблиця 6.3

Архітектура мережі	Показник				
	Час аналізу вибірки*, мс	Обсяг пам'яті для зберігання мережі, кБ	Достовірність контролю при значенні коефіцієнта чутливості ρ		
			$\rho = 0,90$	$\rho = 0,92$	$\rho = 0,93$
Fuzzy-ART	1530	115	0,99	1,00	0,98

В табл. 6.4 наведено порівняльний аналіз, мережі ART-2 та Fuzzy-ART.

Таблиця 6.4

Показник	Тип нейронної мережі		
	ART-2	Fuzzy-ART	Гібридна мережа
Швидкість навчання, с	1,6	1,5	5,7
Достовірність контролю	0,98-0,99	0,98-0,99	0,96-0,98
Можливість визначити нові (аномальні) об'єкти	ТАК	ТАК	ТАК
Час класифікації вибірки*, мс	1610	1530	2210
Обсяг пам'яті для зберігання мережі, кБ	203	115	219

Як видно з табл. 6.4 класифікатори на основі модифікованих мереж ART-2 і Fuzzy-ART забезпечують високу достовірність контролю, швидкість роботи, потребують достатньо малий обсяг фізичної пам'яті для зберігання, а також динамічно розширюють власну базу знань про можливі класи в процесі роботи (без зупинки процесу діагностики) і без повного перенавчання мережі, що фактично забезпечує можливість проведення безеталонної діагностики.

Результати дослідження класифікаторів побудованих на основі нейронних мереж сімейства ART.

Досліджено як класичні архітектури мереж ART-2 та Fuzzy-ART так і модифіковані архітектури, що були описані в попередніх параграфах. За діагностичні ознаки використано зміну форми інформаційного сигналу дефектоскопа, що реалізує метод низькошвидкісного удару. В результаті визначено оптимальний рівень коефіцієнта чутливості ρ для кожної з архітектур ART-мереж. Також для дослідження достовірності контролю зазначеними нейронними мережами були змодельовані реалізації інформаційних сигналів дефектоскопа, що відповідають пошкодженню ділянки зразка з енергією пошкоджуючого удару 0,81кДж, 1,38кДж, 3,08кДж, 4,21кДж та 4,59кДж. Моделювання зазначених сигналів відбувалось з застосуванням методики, що описана в п.6.1. Змодельовані сигнали представлено на рис. 6.12.

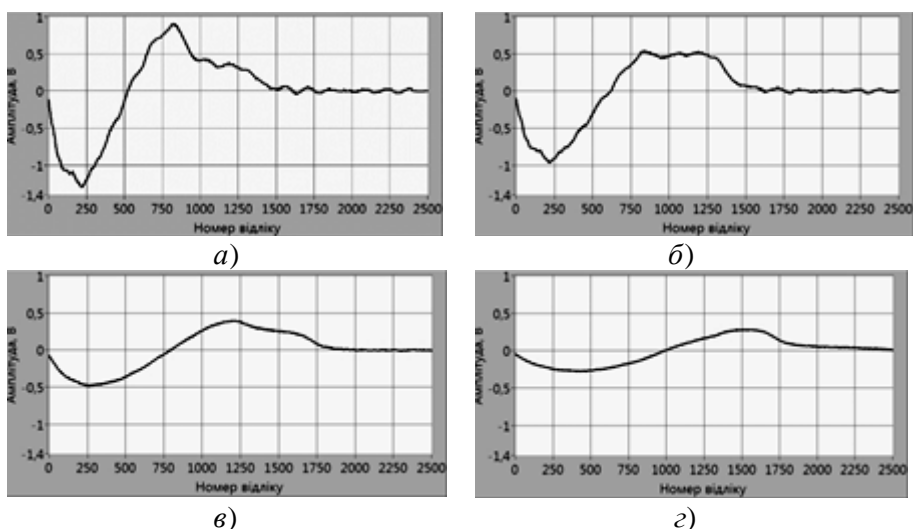


Рис. 6.12. Змодельовані інформаційні сигнали, що відповідають дефектам внаслідок пошкоджуючого удару з енергією 0,81кДж (а), 1,38кДж (б), 3,08кДж, (в) 4,21кДж (г)

Результати роботи розроблених ART-мереж відображені в табл. 6.5 та 6.6, куди заносилась кількість сигналів віднесених до кожного класу під час діагностики стільникових панелей.

Таблиця 6.5

Тип ділянки	Значення коефіцієнта чутливості мережі, ρ					
	$\rho = 0,96$	$\rho = 0,975$	$\rho = 0,98$	$\rho = 0,985$	$\rho = 0,99$	$\rho = 0,995$
Без дефекту	100	100	100	100	100	86
						14
Дефект 1 (2,23кДж)	200	100	100	100	100	100
Дефект 2 (2,81кДж)		100	100	100	98	50
					2	50
Дефект 3 (3,24кДж)	100	100	100	100	99	92
					1	8
Дефект 4 (5,11кДж)	100	100	100	100	100	100
Дефект 5 (0,81кДж)	—	100	100	100	—	—
Дефект 6 (1,38кДж)	—	100	100	100	—	—
Дефект 7 (3,08кДж)	—	100	100	100	—	—
Дефект 8 (4,21кДж)	—	99	96	74	—	—
			4			
Дефект 9 (4,59кДж)	—	101	8	40	—	—
			92	86		

Таблиця 6.6

Тип ділянки	Значення коефіцієнта чутливості мережі, ρ				
	$\rho = 0,88$	$\rho = 0,90$	$\rho = 0,92$	$\rho = 0,93$	$\rho = 0,94$
Без дефекту	100	100	100	98	88
				2	10
					2
Дефект 1 (2,297кДж)	200	100	100	100	100
Дефект 2 (2,812кДж)		100	100	97	42
				3	58
Дефект 3 (3,240кДж)	100	100	100	100	100
Дефект 4 (5,109кДж)	100	100	100	100	100
Дефект 5 (0,804кДж)	—	100	100	—	—
Дефект 6 (1,378кДж)	—	100	100	—	—
Дефект 7 (3,082кДж)	—	100	100	—	—
Дефект 8 (4,212кДж)	—	75	92	—	—
		28	8		
Дефект 9 (4,586кДж)	—	97	91	—	—
			9		

Також, було досліджено залежність достовірності контролю стану стільникових панелей з використанням НМ ART-2 і Fuzzy-ART від значення коефіцієнта чутливості мережі ρ .

Як видно з табл. 6.5 та 6.6 при певних значеннях коефіцієнта чутливості ρ мережа створювала один спільний клас для декількох типів дефектів або навпаки для одного типу дефекту мережа створювала декілька класів. В таблицях ризикою (—) позначено ситуації, коли мережа не змогла класифікувати представлені сигнали (наприклад, в табл. 6.5 для ділянок дефектів 5-9 при $\rho = 0,96$ або $\rho = 0,995$). Аналізуючи результати можна зробити висновок, що для нейронної мережі ART-2 зі зміненою архітектурою необхідно вибирати значення коефіцієнта чутливості мережі в діапазоні $0,975 \leq \rho \leq 0,986$, а для модифікованої нейронної мережі Fuzzy-ART оптимальні значення коефіцієнта чутливості мережі знаходяться в діапазоні $0,90 \leq \rho \leq 0,92$.

Результати дослідження достовірності контролю D стільникових панелей при використанні модифікованої мережі ART-2 наведено на рис. 6.13, а мережі Fuzzy-ART на рис. 6.14. Достовірність контролю визначалась з врахуванням помилок першого α і другого β роду.

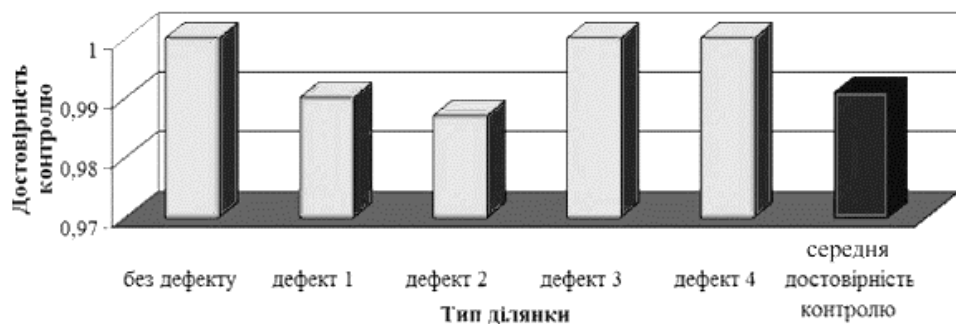


Рис. 6.13. Достовірність контролю з використанням класифікатора на основі мережі ART-2

Для дослідження чутливості та роздільної здатності класифікатора на основі нейронних мереж ART-2 і Fuzzy-ART, в експериментах застосовувалися синтезовані інформаційні сигнали. Було змодельовано по 100 реалізацій інформаційних сигналів, що відповідають пошкодженню ділянки зразка з енергією пошкоджуючого удару 0.5кДж, 0.6кДж, 2.0кДж, 2.5кДж, 3.0кДж та 4.2кДж. Змодельовані сигнали представлено на рис. 6.15.

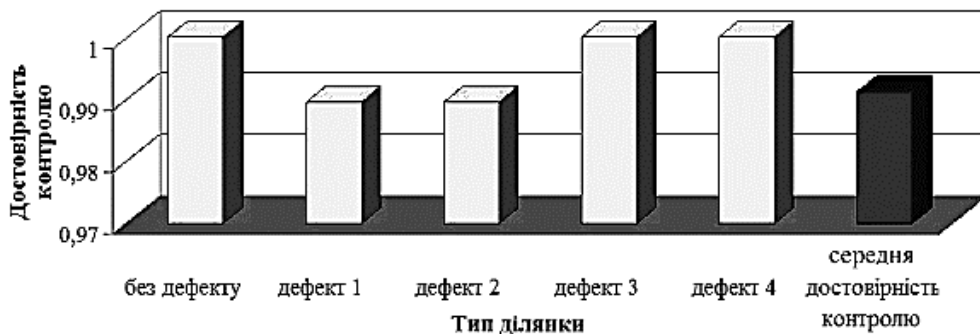


Рис. 6.14. Достовірність контролю з використанням класифікатора на основі мережі Fuzzy-ART

Для дослідження чутливості класифікатора на основі нейронних мереж ART-2 і Fuzzy-ART до дефектів в композиційних матеріалах (визначення мінімального рівня пошкодженості зразка, який може бути виявлено та класифіковано) використовувались інформаційні сигнали (рис. 6.15а – 6.15е), що характерні для ділянок з різним ступенем пошкодженості.

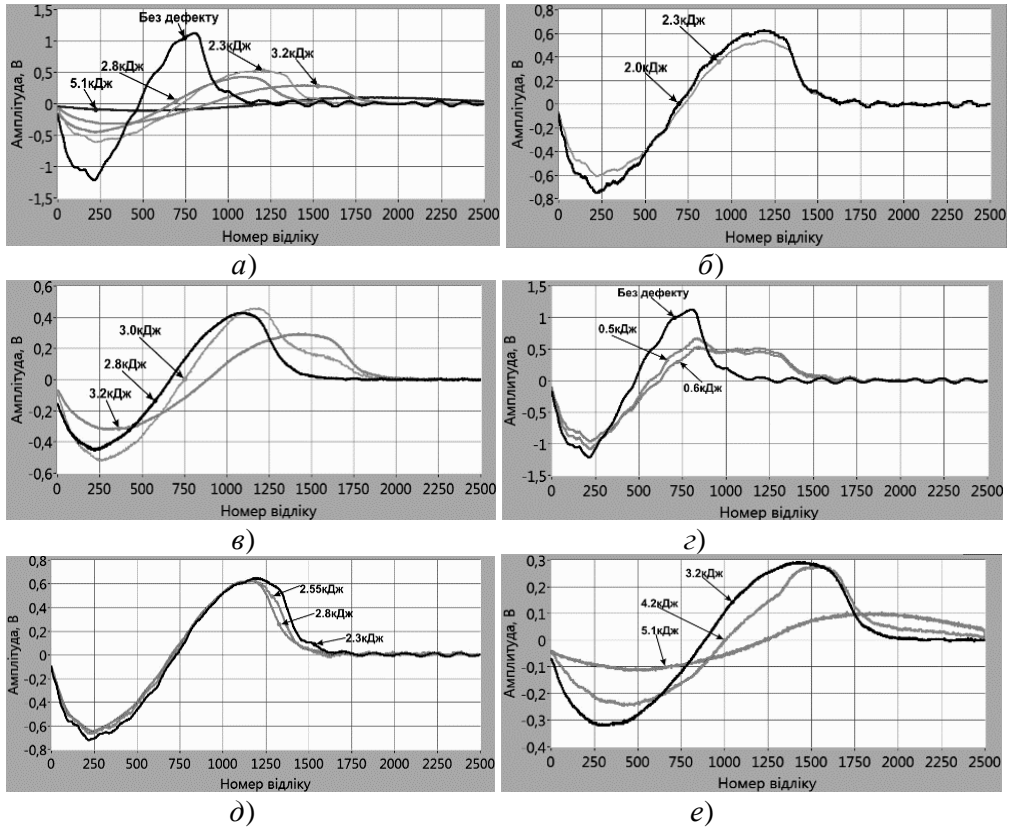


Рис. 6.15. Реалізації інформаційних сигналів, що відповідають ділянкам з різним ступенем пошкодження, та синтезовані сигнали:

- а) 2.3кДж, 2.8кДж, 3.2кДж, 5.1кДж та без дефекту; б) 2.0кДж та 2.3кДж; в) 2.8кДж, 3.0кДж та 3.2кДж; г) 0.5кДж, 0.6кДж та без дефекту; д) 2.3кДж, 2.55кДж та 2.8кДж; е) 3.2кДж, 4.2кДж та 5.1кДж

Результати контролю наведено в табл. 6.7, куди заносилась кількість вірно класифікованих сигналів для кожного типу дефекту під час діагностики стільникових панелей. З отриманих результатів видно, що розроблений класифікатор дозволяє достовірно визначати дефекти, що відповідають пошкодженню завданому ударом з енергією 0.5 кДж, а також класифікатор розрізняє дефекти, що завдані з близькими значеннями енергії пошкоджуючого удару (наприклад, 2.0 та 2.3 кДж; 2.3, 2.5 та 2.8 кДж; 2.8, 3.0 та 3.2 кДж; 3.2, 4.2 та 5.1 кДж). Мінімальний ступінь пошкодження зразків стільникових панелей, який можна достовірно визначати за допомогою розробленого класифікатора на основі нейронних мереж адаптивної резонансної теорії, відповідає дефекту завданому з енергією пошкоджуючого удару 0.6 кДж.

Таблиця 6.7

Ділянка з пошкодженням завданім ударом з енергією A										
(Без дефекту)	0,5 кДж	0,6 кДж	2,0 кДж	2,3 кДж	2,5 кДж	2,8 кДж	3,0 кДж	3,2 кДж	4,2 кДж	5,1 кДж
100	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Для дослідження роздільної здатності класифікатора було обрано п'ять основних ділянок досліджуваних зразків: без дефекту та ділянки з пошкодженням з енергією 2,23 кДж, 2,81 кДж, 3,24 кДж та 5,11 кДж. В експерименті визначались інтервали енергії пошкоджуючого удару для кожної з наведених ділянок стільникової панелі, за яких сигнали будуть правильно класифіковані.

Для вирішення поставленої задачі проводився синтез інформаційних сигналів дефектоскопа, що відповідають ділянкам з пошкодженням завданім ударом з енергією від 0 до 5,11 кДж з кроком 0,01 кДж. Далі, отримані сигнали подавались на вхід класифікатора, для визначення класу, до якого вони відносяться. Таким чином, було досліджено роздільну здатність класифікатора та визначено інтервали енергії пошкоджуючого удару для зазначених ділянок стільникової панелі. Отримані за допомогою мереж ART-2 і Fuzzy-ART (F-ART) межі класів наведено в табл. 6.8.

Таблиця 6.8

Тип мережі	Тип ділянки									
	Без дефекту		Дефект 1 (2,30 кДж)		Дефект 2 (2,81 кДж)		Дефект 3 (3,24 кДж)		Дефект 4 (5,11 кДж)	
	Від, кДж	До, кДж	Від, кДж	До, кДж	Від, кДж	До, кДж	Від, кДж	До, кДж	Від, кДж	До, кДж
F-ART	0	0,54	2,09	2,55	2,56	2,95	3,17	3,834	4,96	5,11
ART-2	0	0,53	2,05	2,56	2,57	2,94	3,19	3,95	4,98	5,11

З наведених результатів видно, що розроблені класифікатори на основі нейронних мереж ART-2 та Fuzzy-ART зі зміненою архітектурою мають високі показники достовірності при діагностиці і можуть автоматично розширювати власну базу знань про можливі дефекти досліджуваних об'єктів, а також характеризуються достовірністю діагностування – 97 - 99%.

Результати дослідження нейромережових класифікаторів для безеталонної діагностики також наведені в роботах [24, 123, 135].

Література

1. *Акушский И.Я.* Машинная арифметика в остаточных классах / И. Акушский, Д. Юдицкий. – М.: Сов. радио, 1968. – 440 с.
2. *Бабак В.П.* Обробка сигналів: Підручник / В.П. Бабак, В.С. Хандецький, Е. Шрюфер – К.: Либідь, 1999. – 496с.
3. *Бабак В.П.* Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Підручник / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
4. *Бабак В.П.* Теоретичні основи захисту інформації: Підручник. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2008. – 752 с.
5. *Бабак С. В.* Статистическая диагностика электротехнического оборудования: Монография / С.П. Бабак, М.В. Мыслович, Р.М. Сысак. – К.: Инт електродидамики НАН Украины, 2015. – 456 с.
6. *Бендат Дж.* Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол: Пер с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
7. *Берка К.* Измерения. Понятия, теории, проблемы: пер. с чеш. – М.: Прогресс, 1987.–320 с.
8. *Близнюк Е.Д.* Фазовый обнаружитель сигналов для ультразвукового неразрушающего контроля / Е.Д. Близнюк, В.С. Еременко, И.Н.Быстрая и др. // Техническая диагностика и неразрушающий контроль, 2011. – №2. – С. 21-24.
9. *Большев Л.Н.* Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1965. – 482 с.
10. *Браун С.* Анализ вибраций роликовых и шариковых подшипников / С. Браун, В. Датнер // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия «Конструирование и технология машиностроения». – 1979, т. 101, №1. – С. 65–72.
11. *Брейсуэл Р.,* Преобразование Хартгли: Теория и приложения : Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 175 с.
12. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн., К.А.Семендяев. – М.: Наука. Физматлит. – 1986. – 544 с.
13. *Вибрация энергетических машин: Справочное пособие /* Под ред. Н.В. Григорьева. – Л.: Машиностроение, 1974. – 464 с.
14. *Волков Л.К.* Вибрация и шум электрических машин малой мощности / Л.К. Волков, Р.Н. Ковалёв, Г.И. Никифорова и др. – Л.: Энергия, 1979. – 205 с.

15. *Герцик С.М.* Моделі формування навчаючих сукупностей для діагностування електротехнічного обладнання з урахуванням режимів його роботи / С.М. Герцик, М.В. Мислович // Метрологія та прилади. – 2017, №5. – С. 94-97.
16. *Гижко Ю.І.* Елементи теорії та питання практичного застосування систем вібродіагностування рухомих частин електричних машин/ Ю.І. Гижко, М.В. Мислович // Технічна електродинаміка. – 2015, №2. – С. 45 – 56.
17. *Гужов В.И.* Компьютерная интерферометрия / В. Гужов, С. Ильиных. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 252 с.
18. *Гуляев В.А.* Вычислительная диагностика. – К.: Наукова думка, 1992. – 232 с.
19. *Дайер В.* Обнаружение повреждения подшипника качения путём статистического анализа вибраций / В. Дайер, Р. Стюарт // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия «Конструирование и технология машиностроения». – 1978, т. 100, №2. – С. 23 – 31.
20. *Денисов В.П.* Фазовые радиопеленгаторы / В. Денисов, Д. Дубинин. – Томск: ТГУСУР, 2002.–251 с.
21. *Директор С.* Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 464 с.
22. *Дорожовець М.* Основи метрології та вимірювальної техніки: Підручник. Т. 2. Вимірювальна техніка / М. Дорожовець, В. Мотало, Б. Стадник та ін.; за ред. Б. Стадника. – Львів: Вид-во Національного ун-ту «Львівська політехніка», 2005. – 656 с.
23. *Драган Я.П.* Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів. – Львів: ЦСДЕС, 1997. – 333 с.
24. *Еременко В.С.* Применение нейронных сетей для повышения достоверности неразрушающего контроля изделий из композиционных материалов / В.С. Еременко, А.В. Переєденко, Ю.В. Куц // Научни известия. – София, Болгария. – 2013. – №2(139). – С. 62- 67.
25. *Еременко В.С.* Обнаружение ударных повреждений сотовых панелей методом низкоскоростного удара / В.С. Еременко, В.М. Мокийчук, А.М. Овсянкин // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2007, №1. – С. 24-27.
26. *Ермолин Н.П.* Надёжность электрических машин / Н.П. Ермолин, И.П. Жерихин. – Л.: Энергия, 1976. – 248 с.
27. *Єременко В.С.* Застосування нейромережових технологій у системах неруйнівного контролю / В.С. Єременко, А.В. Переїденко, О.В. Монченко // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2012, №1. – С. 35-41.
28. *Єременко В.С.* Ранжування інформативних ознак при неруйнівному контролі композиційних матеріалів / В.С. Єременко, А.В. Переїденко, Є.О. Піколенко //

- Вісник Національного технічного університету «ХП». – 2010, №57. – С. 159-164.
29. Информационно-измерительные системы. Применение интеллектуальных модулей, методов и средств повышения точности физических измерений: Монография / А.А. Зори, С.И. Клевцов, В.Д. Коренев и др. – Донецк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. – 206 с.
 30. Інформаційне забезпечення моніторингу об'єктів теплоенергетики: Монографія /В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Берегун та ін.; за ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака / – К., 2015. – 512 с.
 31. *Кендалл М.* Теория распределений / М. Кендалл, А. Стьюарт, пер. с англ. под. ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 588 с.
 32. *Кинкулькин И.Е.* Фазовый метод определения координат / И. Кинкулькин, В. Рубцов, М. Фабрик. – М.: Сов. радио, 1979.– 280 с.
 33. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа /А.Н. Колмогоров, С.Ф. Фомин. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. –544с.
 34. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ. под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
 35. *Краснобаев В.А.* Концепция создания компьютерных средств обработки данных на основе использования кодов класса вычетов // В. Краснобаев, М. Маврина, С. Кошман, В. Курчанов. – Системы обработки информации, 2013. – № 4 (111). – С. 133 -138.
 36. *Кузьмин И.В.* Основы теории информации и кодирования: Учебник / И.В. Кузьмин, В.А. Кедрус. – К.: Вища школа, 1986. - 238 с.
 37. *Куйбышев А.Б.* Надёжность асинхронных электродвигателей общепромышленного применения. – М: Изд-во стандартов, 1972. – 104 с.
 38. *Кулаков Ю.О.* Використання вибіркової колової медіани як інформативної характеристики в статистичній обробці кутових даних / Ю.О. Кулаков, В.Ю. Куц// – Електроніка та системи управління. – 2007, №3(13). – С. 30-36.
 39. *Куликовский К.Л.* Методы и средства измерений / К.Л. Куликовский, В.Я. Купер. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 448 с.
 40. *Кухарчук В.В.* Основи метрології та електричних вимірювань: Підручник / В.В. Кухарчук, В.Ю. Кучерук, Є.Т. Володарський, В.В. Грабко. – Херсон: Олді-плюс, 2013.–538 с.
 41. *Куштин И.Ф.* Инженерная геодезия / И.Ф. Куштин, В.И. Куштин. – Ростов-на-Дону: Изд-во Феникс, 2002.– 416 с.
 42. *Куц В.Ю.* Аналіз застосування кругової медіанної фільтрації в задачах обробки сигналів / В.Ю. Куц. – Ін.т проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Е. Пухова. – К.: 36. наук. праць, 2007. – Вип.39. – С 50-56.

43. *Куц Ю.В.* Вимірювання кумулятивних фазових зсувів. – Технічна електродинаміка, 2001. – №5. – С.67-72.
44. *Куц Ю.В.* Дослідження методу вибірових тригонометричних моментів в задачах апроксимації розподілів кутових даних // Ю.В. Куц, С.В. Шенгур, О.С. Мельник. – Системи обробки інформації, 2015. – №6 (131). – С.111-115.
45. *Куц Ю.В.* Застосування модулярної арифметики для обчислення азимута у фазових пеленгаторах // Ю.В. Куц, В.Ю. Куц. – Вісник НТУУ "КПІ". Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування, 2016.– № 64.– С. 23-32.
46. *Куц Ю.В.* Застосування методу тригонометричних моментів в аналізі даних фазових вимірювань // Ю.В. Куц, І.А. Купрійчук, А.А. Рижкова. – Системи обробки інформації. – 2013. – №6 (113). – С. 98-102.
47. *Куц Ю.В.* Применение выборочных характеристик расположения и рассеяния в фазометрии //Ю.В.Куц, Н.С Куц.– Электронное моделирование, 2004. – №2 (Т. 26). – С.89-97.
48. *Куц Ю.В.* Подання результату кутових вимірювань в концепції невизначеності // Ю.В. Куц, С.В. Шенгур. – Системи обробки інформації, 2013. – Вип. 3 (110). – С. 97-100.
49. *Куц Ю.В.* Статистична фазометрія: Монографія / Ю.В. Куц, Л.М. Щербак - Тернопіль: Тернопільський державний ун-т ім. І. Пулюя. – 2009. – 383с.
50. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1 / Б.Р. Левин – М.: Сов. Радио, 1969. – 752 с.
51. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Аристотель и поздняя классика. – Харьков: Фолио, 2000. – 880 с.
52. *Лозэв М.* Теория вероятностей: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1962. – 719 с.
53. *Маевский С.М.* Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояний25 / С.М. Маевский, В.Г. Баженов, Е.К. Батуревич та ін. – К.: Вища школа, 1983. – 83 с.
54. *Маєвський С.М.* Основи побудови систем аналізу сигналів у неруйнівному контролі: Навч. посібник / С.М. Маєвський, В.П. Бабак, Л.М. Щербак. - К.: Либідь. – 1993. – 200 с.
55. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2 т.; Пер. с франц. – М.: Мир, 1983. – Т. 2. – 256 с.
56. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры изд-ва «Наука», 1979. – 240 с.
57. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
58. *Марченко Б.Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – К.: Наукова думка, 1973. – 192 с.

59. *Марченко Б.Г.* Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин / Б.Г. Марченко, М.В. Мыслович. – К.: Наукова думка, 1992.– 196с.
60. *Марченко Б.Г.* Линейные случайные процессы и их приложения/ Б.Г. Марченко, Л.Н. Щербак. – К.: Наукова думка, 1975. – 144 с.
61. *Марченко В.Б.* Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике / В.Б. Марченко // К.: Наукова думка, 1992. – 210 с.
62. *Марченко Б.Г., Щербак Л.М.* Основи теорії вимірювань // Праця ІЕД НАНУ. – К., 1999. – С. 221-230.
63. *Марченко Б.Г., Щербак Л.М.* Сучасна концепція побудови теорії вимірювань // Доповіді Національної академії наук України, 1999. - № 10. – С. 85-88.
64. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.1. – М.: Сов. энциклопедия, 1980. – 1184 с.
65. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.2. – М.: Сов. энциклопедия, 1979. – 1104 с.
66. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.3. – М.: Сов. энциклопедия, 1982. – 1184 с.
67. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.4. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 1216 с.
68. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.5. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 1248 с.
69. *Мыслович М.В.* Про деякі особливості побудови інтелектуальних багаторівневих систем технічної діагностики електроенергетичних об'єктів / М.В. Мыслович, Р.М. Сисак // Технічна електродинаміка. – 2015, №1. – С. 78–85.
70. *Митропольский А.К.* Техника статистических вычислений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 480 с.
71. *Михеечев В.В.* Геодезические светодальномеры / В. Михеечев. – М.: Недра, 1979. – 222 с.
72. Надёжность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. / Т. 9 Техническая диагностика / Под ред. В.В.Клюева, П.П.Пархоменко. – М.: Машиностроение, 1987. – 352 с.
73. *Новопашенный Г.Н.* Информационно-измерительные системы: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1977. – 208 с.
74. *Орнатский П.П.* Теоретические основы информационно-измерительной техники: Учебник. – К.: Вища школа, 1983. - 455 с.
75. Основи метрології та виміральної техніки: Підручник у 2 т./М. Дорожовець, В. Мотало, Б. Стадник, В. Василюк, Р. Борек, А. Ковальчик. –

- Львів: Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2005. – 1300 с.
76. *Переїденко А.В.* Дослідження алгоритмів проведення кластерного аналізу для вирішення задач неруйнівного контролю / А.В. Переїденко, В.С. Єременко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010, №1/5(43). – С. 40-43.
 77. *Переїденко А.В.* Класифікатор стану виробів з композиційних матеріалів на основі нейронної мережі адаптивної резонансної теорії / А.В. Переїденко, В.С. Єременко, П.А. Шегедін // Вісник Національного авіаційного університету. – 2012. – №1(50). – С. 92-100.
 78. *Переїденко А.В.* Моделювання інформаційних сигналів при вирішенні задач безеталонної діагностики композиційних матеріалів / А.В. Переїденко, В.С. Єременко, П.А. Шегедін// Наукоємні технології. – 2011, №3-4(11-12). – С. 39-44.
 79. *Переїденко А.В.* Формування навчальної вибірки інформаційних сигналів під час неруйнівного контролю виробів з композиційних матеріалів / А.В. Переїденко, В.С. Єременко // Відбір і обробка інформації. – 2011, Вип. 35(111). – С. 47-54.
 80. *Пестряков В.Б.* Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории). – М.: Сов. радио, 1968. – 466 с.
 81. *Поліщук Є.С.* Засоби та методи вимірювань неелектричних величин: Підручник / Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, Б.І. Стадник та ін.; за ред. Є.С. Поліщука. – Львів: Вид-во Бескид Біт. 2012. – 618с.
 82. *Пфанцagl И.* Теория измерения: пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 245 с.
 83. *Рабинер Л.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
 84. *Раннев Г.Г.* Измерительные информационные системы: Учебн. пособие. – М.: Академия, 2010. – 336 с.
 85. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
 86. *Рубичев Н.А.* Измерительные информационные системы: Учебн. пособие. – М.: Дрофа, 2010. – 334 с.
 87. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля // Рытов С.М., Кравцов В.А., Татарский В.И. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
 88. *Справочник по электрическим машинам в 2 т. / Под ред. И.П. Копылова, Б.К. Клокова. Т.1. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 456 с.*
 89. *Статистичний аналіз даних вимірювань. Навч. посібник / В.С. Єременко, Ю.В. Куц, В.М. Мокійчук та ін. – К.: НАУ, 2015. – 321 с.*

90. *Стогній Б.С.* Інтелектуальні електричні мережі електроенергетичних систем та їх технологічне забезпечення / Б.С. Стогній, О.В. Кириленко, С.П. Денисюк // Технічна електродинаміка. – 2010, №6. – С. 44–50.
91. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений: пер. с англ. // Сборник «Психологические измерения». – М.: Мир, 1962. – 110 с.
92. *Счастливый Г.Г.* Надёжность турбогенераторов современных и перспективных / Г.Г. Счастливый, А.И. Титко, Г.М. Федоренко, В.П. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1978. – 223 с.
93. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок: Пер с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.
94. *Темников Ф.Е.* Теоретические основы информационной техники: Учебн. пособие / Ф.Е. Темников, В.А. Афонин, В.И. Дмитриев. – М.: Энергия, 1979. – 512 с.
95. Теоретичні основи інформаційно-вимірювальних систем: Підручник / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Єременко та ін., за ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака. – К.: Ун-т новітніх технологій, НАУ, 2017. – 496 с.
96. Технические средства диагностирования: Справочник / Под общ. ред. В.В.Клюева. – М.: Машиностроение, 1989. – 672 с.
97. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
98. *Уоссермен Ф.* Нейрокомпьютерная техника / Ф. Уоссермен. – М.: Мир, 1992. – 118 с.
99. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров, Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. – М.: Сов. энциклопедия, 1984.– 944 с.
100. *Философский* словарь / Под ред. И.Т. Фролова. – М.: Политиздат, 1981. – 445 с.
101. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит. Т.1, 1969. – 607 с.
102. Філософія: Навч. посіб / Л.В. Губерський, І.Ф. Надольний, В.П. Андрущенко та ін.; За ред. І.Ф. Надольного. – К.: Вікар, 2006.– 534 с.
103. Фрагменты ранних греческих философов. В 2 ч. / Сост. А.В. Лебедев. – М.: Наука, 1989, ч. 1. – 576 с.
104. *Халмош П.* Теория меры: пер. с англ. – М.: Мир, 1953. 289 с.
105. *Хан Г.* Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро: Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 396 с.
106. *Цапенко М.П.* Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование: Учебн. пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 440 с.

107. *Чинцов В.М.* Основы метрологии та вимірювальної техніки. Навч. Посібник. – Харків, НТУ «ХПІ», 2005. – 524 с.
108. *Чмых М.К.* Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
109. *Шубов И.Г.* Шум и вибрация электрических машин. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 208 с.
110. *Щербак Л.Н.* К вопросу аксиом теории измерений // Научно-виробничий журнал «Метрологія та прилади» - №1 (45), 2014. – С. 262-265.
111. *Щербак Л.М.* Функція невизначеності й міри в задачах вимірювань // Научно-виробничий журнал «Метрологія та прилади». - № 5-I (67), 2017. – С.115-118.
112. *Щербак Л.М.* Шумометрія як напрям вимірювань характеристик стохастичних сигналів. / Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. пр. –К.: ІПМЕ НАНУ, 2017, Вип. 78. – С.101-107.
113. *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 279 с.
114. *Antoni J.* Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals /J. Antoni, F. Bonnardot, A. Raad, El. Badaoui // Mechanical systems and signal processing. – 2004. – Vol. 18. – P. 1285–1314.
115. *Antoni J.* Cyclostationarity by examples / Mechanical systems and signal processing. – 2009. – Vol. 23. – P. 987–1036.
116. *Applied Measurement System* / Edited by Md. Zachurul Had. – In Tech, USA, 2012.
117. *Babak V.P.* Self-adapting information system / V.P. Babak, V.M. Sinegla-zov, S.G. Taranov. – К.: NAU, 2007. – 152 p.
118. *Belkhamza Z.* Measuring Organizational Information Systems Success: New Technologies and Practices / Z. Belkhamza, A. Wafa. – Universiti Malaysia Sabah, Malaysia, 2012.
119. *Carpenter G.A.* A massively parallel architecture for a self-organizing neural pattern recognition machine / G.A. Carpenter, S. Grossberg // Computer Vision, Graphics, and Image Processing. – 1987. – №37. – P. 54-115.
120. *Carpenter G.A.* ART 2-A: An adaptive resonance algorithm for rapid category learning and recognition / G.A. Carpenter, S. Grossberg, D.B. Rosen // Neural Networks. – 1991. – №4. – P. 493-504.
121. *Carpenter G.A.* Fuzzy ART: Fast stable learning and categorization of analog patterns by an adaptive resonance system / G.A. Carpenter, S. Grossberg, D.B. Rosen // Neural Networks. – 1991. – №4. – P. 759-771.
122. *Derhunov O.* Improvement of ultrasonic testing method for materials with significant attenuation // O. Derhunov, Y. Kuts, S. Shengur, O. Monchenko, Y. Oliinyk. – Eastern-European Journal of Enterprise Technologies ISSN 1729-3774 – 1/9(91), 2018. – P.54-610.

123. Eremenko V.S. Neural Network Based System for Nondestructive Testing of Composite Materials Using Low-Frequency Acoustic Methods / V.S. Eremenko, E.F. Suslov, A.V. Pereidenko // *Universal Journal of Engineering Science*. – Alhambra, USA. – 2013. – №1(3). – P. 95-109.
124. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. – ISO, Switzerland. – 1993. – 112 p.
125. *Fisher N.I.* Statistical Analysis of Circular Data / Cambridge University Press, 2000. – 277 p.
126. *Freeman J.A.* Neural networks. Algorithms, applications, and programming techniques / J.A. Freeman, D.M. Skapura. – Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1991. – 401 p.
127. *Herold R.* Encyclopedia of Information Assurance / R. Herold, M. Robers. – Indiana, USA, 2010.
128. *Hertz J.* Introduction to the Theory of Neural Computation / J. Hertz, A. Krogh, R.G. Palmer. – Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1991. – 327 p.
129. Information Provision of Diagnostic Systems for Energy Facilities / V.P. Babak, S.V. Babak, M.V. Myslovych, A.O. Zaporozhets, V.M. Zvarych; Edited by Corresponding Member of the NAS of Ukraine V.P. Babak. – Kyiv: Akademperiodyka, 2018. – 132 p.
130. Kalsi H.S. Electronic instrumentation. – Third edition. – New Delhi: Tata McGraw-Hill Education, 2012. – 829 p.
131. *Konkar P.K.* Fault Diagnosis of a rotor bearing systems using response surface method / P. K. Konkar, S. P. Harsha, P. Kumar, S. C. Sharmal // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. – 2009. – Vol. 28. – P. 841–857.
132. *Napolitano A.* Cyclostationarity: New trends and applications / *Signal Processing*. – 2016, Vol.120. – P. 385–408.
133. *Nataraj C.* The effect of bearing cage run-out on the non-linear dynamics of a rotating shaft / C. Nataraj, S. P. Harsha // *Communications in nonlinear science and numerical simulation*. – 2008, Vol.13. – P. 822–838.
134. *Omondi A.* Residue Number Systems. Theory and Implementation / A. Omondi, B. Premkumar. – London, Imperial College Press, 2007. – 296 p.
135. *Pereidenko A.V.* Software of Information-Measurement System for Standardless Diagnostic of Composite Materials / A.V. Pereidenko, V.S. Eremenko // *Software Engineering*. – Rosemead, USA. – 2012. – v.2, №3. – P. 65-76.
136. *Wiener N.* A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics, *Proc. London Math. Soc.*, 19 (1921), 181-205.

В монографії розглянуті сучасні методи створення моделей та мір у вимірюваннях, фізичні та ймовірнісні міри, моделі, простори та базиси сигналів та полів, детерміновані та ймовірнісні моделі та міри кутових величин і приклади їх використання на колі та в фазових вимірюваннях, моделі і міри для діагностування в електроенергетиці, безеталонних вимірюваннях характеристик композитних матеріалів.

Для наукових співробітників, інженерів, а також викладачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів, що займаються проблемами вимірювань, моніторингу та діагностики технічних об'єктів.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕХНІЧНОЇ ТЕПЛОФІЗИКИ

Бабак Віталій Павлович,
Єременко Володимир Станіславович, Куц Юрій Васильович,
Мислович Михайло Володимирович, Щербак Леонід Миколайович

МОДЕЛІ ТА МІРИ У ВИМІРЮВАННЯХ

Монографія

За редакцією чл.-кор. НАН України В. П. Бабака

Підп. до друку2019. Формат 60×80/16. Папір офс. №1.
Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Наклад пр.

Віддруковано у друкарні